Projekter til Matematik C

Med brug af formelregner TI-82

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net 2015

Indholdsfortegnelse

1. Projekt Prognoser

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at beregne to fremtidige værdier for en formue, der vokser med konstant vækst: Når formuen efter 2 og 5 måneder er hhv. 10 og 30 enheder, hvad vil den da være efter 8 måneder, og hvornår vil den være 60 eneheder?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier
4. Opstil en lineær model for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
5. Opstil en eksponentiel model for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
6. Opstil en potensmodel for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
8. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

2. Projekt Befolkningsvækst og Fødevarevækst

Problem fra virkeligheden
Den engelske økonom Malthus (1766-1834) forudsagde omkring år 1800 en kommende fødevarekrise:
"Da verdens befolkningen vokser eksponentielt og fødevaremængden lineært, vil befolkningstallet en dag overhale fødevaremængden med hungersnød til følge" (Malthus' befolkningsprincip). Har Malthus ret?
Vi vil belyse problematikken med en model. Vi opstiller en tabel over tiden x angivet som antal år efter 1850; og verdens befolkning, der antages at være 1.59 mia i 1900 og 5.3 mia i 1990; og verdens fødevareproduktion, der antages at være 1.800 mia. dagsrationer i 1900 og 4.5 mia. dagsrationer i 1990. Befolkningstallet antages at vokse eksponentielt, og fødevaremængden antages at vokse lineært. Tabellens gyldighedsområde antages at være $0 < x < 250$.

1. Opstil en tabel for befolkningstallet og antal dagsrationer.
Formlen for befolkningstallet bestemmes ved ExpReg L1, L2, Y1. bogstaver.
2. Find en regressionsformel for hver af tabellens størrelser.
3. Fortolk betydningen af tallene i de to regressionsformler.
4. Illustrer de to størrelser geometrisk og find grafernes skæringspunkter.
5. Til kontrol, find algebraisk de to tidspunkter, hvor de to størrelser er ens.
6. Opstil en alternativ model, som bygger på den antagelse, at verdens befolkning vokser med 1% om året, og fødevaremængden med 40 om året
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til mundtlig eksamen.
8. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

3. Projekt Afstandsbestemmelse

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme afstanden fra en basislinie AB til et utilgængeligt punkt P

1. Udmål en basislinie AB og sigtevinklerne til B fra A og P.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de øvrige stykker i trekant ABP, samt højden PC.
4. Beregn vinkel B i trekant ABR.
5. Beregn siden RB.
6. Beregn vinkel P i trekant PBR.

7. Beregn siden BP.
8. Beregn siden PC i trekant PBC.
9. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til mundtlig eksamen.
10. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

4. Projekt Broen

Problem fra virkeligheden
Over en 8 meter bred kløft skal bygges en hængebro af to krydsende stålbjælker fastgjort til klippevæggen 5 meter oppe og til en 3.5 meter lang stolpe, som er anbragt 1 meter fra kløften, og som er støttet af en stålwire, der danner en vinkel på 30 grader med vandret . De tre stållængder ønskes bestemt, samt samlingspunktet over kløften.

1. Konstruer en tegning af broen i målestoksforholdet 1:100. Påfør tegningen de opgivne mål samt relevante bogstaver.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Beregn længden af stålwiren
4. Beregn længden af de to stålbjælker.
5. Indlæg et passende koordinatsystem, og opstil i dette ligningerne for de to stålbjælker.
6. Find koordinaterne til stålbjælkerens skæringspunkt C.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til mundtlig eksamen.
8. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

5. Projekt Statistik

Problem fra virkeligheden

Fra et spørgeskema er udtaget to spørgsmål, hvor følgende svar blev givet:

Hvor mange børn har din mor født? 4, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 5, 2, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 2.
Hvor langt har du til skole? 5, 25, 17, 8, 16, 1, 7, 18, 1, 2, 17, 2, 5, 2, 1, 5, 14, 10, 5, 28, 4, 29, 18, 12, 3, 5, 8, 10, 4, 16, 19, 21, 4, 11, 10, 11, 20, 21, 4, 3, 25, 10, 21, 5, 20, 10, 5, 15, 2, 15.

Vi ønsker at sammenfatte de mange forskellige tal til 2-3 tal, som beskriver tallenes midte og variation.

1. Spørgsmål 1: Opstil de indsamlede data i en hyppighedstabel.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Beregn frekvenser og opsummerede frekvenser.
4. Find talmaterialets kvartilsæt, og oversæt det til journalist-sprog efter at have tegnet et boksplot.
5. Find talmaterialets middeltal, og oversæt dette til journalist-sprog.
6. Spørgsmål 2: Grupper de indsamlede data og opstil en hyppighedstabel.
7. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
8. Beregn frekvenser og opsummerede frekvenser.
9. Find talmaterialets kvartilsæt, og oversæt det til journalist-sprog efter at have tegnet et boksplot.
10. Find talmaterialets middeltal, og oversæt dette til journalist-sprog.
11. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

6. Projekt Golf

Problem fra virkeligheden
Fra en placering på en 2 meter høj flad bakke skal en golfbold sendes over en 3 meter høj hæk, der befinder sig på bakken 2 meter væk, og ramme i et hul, der befinder sig 12 meter væk i højde nul.

Hvad er boldens banekurve? Hvilken højde har bolden i afstanden 10 meter? Hvornår har bolden højden 6 meter? Hvor højt når bolden op? Hvilken retning har bolden i begyndelsen? Hvilken retning har bolden ved nedslaget?

1. Indlæg et koordinatsystem, så golfbold befinder sig i punktet (x,y) = (0,2), og golfhullet i punktet (12,0).
2. Opstil en tabel over x og y og som indeholder modellens kendte og ukendte oplysninger.
3. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
4. Find en regressionsformel, der følger tabellens 3 talpar præcist. Hvor mange bøjninger er der?
5. Illustrer formlen geometrisk, og brug kurven til at finde de ukendte størrelser.
6. Til kontrol, brug også algebra til at finde de ukendte størrelser.
7. For at finde boldens retning hhv. i begyndelsen findes kurvens hældning i x = 0 ved hjælp af CAS-værktøjets dy/dx. Herefter kan vinklen v bestemmes af ligningen tan v = dy/dx.
8. Find på samme måde boldens retning ved nedslaget, i afstanden 10 meter og i højden 6 meter,
9. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

7. Projekt Indsamling, Lafferkurve

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at indsamle et beløb til Operation Dagsværk blandt skolens 500 elever ved at sælge billetter til en fast pris. Hvilken af følgende tre indsamlingsmåder giver det største bidrag?

A. Uden markedsføring. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgslen falder hurtigt, så kun 100 kunder vil give 20 kr.
B. Med markedsføring. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgslen falder jævnt.
C. Med lotteri med 1 hovedpræmie på 500 kr og 3 sidepræmier på 200 kr. Et spørgeskema med spørgsmålet 'hvad vil du maksimalt betale?' viser, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at 480 kunder vil give 10 kr, 400 kunder vil give 20 kr, 200 kunder vil give 30 kr og 100 kunder vil give 40 kr.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger for hver af de tre måder.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at besvare spørgsmålet.
4. Opstil ud fra alternativ A en kvadratisk model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.
5. Opstil ud fra alternativ B en lineær model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.
6. Opstil ud fra alternativ C en kubisk model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
8. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

8. Projekt Kørsel

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme en række egenskaber ved Peters kørsel, hvor farten blev målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de ønskede værdier.
4. Find en regressionsformel, der følger tabellens 5 talpar præcist. Hvor mange bøjninger er der?
Besvar følgende spørgsmål både algebraisk og geometrisk

5. Hvornår begyndte og sluttede kørslen?
6. Hvad var farten efter 12sekunder?
7. Hvornår var farten 25m/s?
8. Hvornår blev der accelereret?
9. Hvornår blev der bremset?
10. Hvad var den maksimale fart?
11. Hvor mange meter kørtes der i de forskellige 5sekunders intervaller?
12. Hvad var accelerationen i begyndelsen af disse intervaller?
13. Hvor langt kørtes i alt?
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

9. Projekt Overtagelsesforsøg

Problem fra virkeligheden
Selskab A forsøger at overtage selskab B ved at opkøbe 1B-aktie pr. dag i 30 dage. B-aktien svinger i kurs og var 50, 80, 40 og 90 efter hhv. 0, 10, 20 og 30 dage. Hvad var kursen efter 4 dage? Hvornår var kursen 70 Kkr? Hvornår stiger kursen? Hvornår falder kursen? Hvornår topper og bunder kursen? Hvor mange Kkr. brugtes der I de forskellige 10 dages intervaller? Hvad var kursstigningen i begyndelsen af disse intervaller.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Find en regressionsformel, der følger tabellens 4 talpar præcist. Hvor mange bøjninger er der?
Besvar følgende spørgsmål både algebraisk og geometrisk
4. Hvad var kursen efter 4 dage?
5. Hvornår var kursen 70 Kkr?
6. Hvornår stiger og falder kursen?
7. Hvornår topper og bunder kursen?
8. Hvor mange Kkr. brugtes der I de forskellige 10 dages intervaller?
9. Hvad var kursstigningen i begyndelsen af disse intervaller.
10. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

10. Projekt Opsparing og Pension

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at finde den månedlige pension over 10 år, som kan kommer fra en opsparing på 1000 kr. hver måned i 30 år. Renten er 0.4% pr. md.

1. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
2. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier.
3. Opstil en model for opsparingen og bestem algebraisk og geometrisk den opsparede kapital efter hhv. 10, 20 og 30 år.
4. Hvor meget er egetbidrag og rentebidrag til opsparingen efter 30 år?
Skal opsparingen udbetales som pension over 10 år, benyttes to konti. På konto 1 er opsparingen til forrentning, og på konto 2 vil den udbetalte pension udgøre en 'negativ opsparing'.
5. Opstil en formel for kapitalens udvikling på de to konti.
6. Hvad er den månedlige pension, hvis de to konti skal balancere efter 10 år:
7. Bestem forholdet mellem det indskudte og det udtagne beløb.
8. Gentag beregningerne med en månedlig rente på 0.3% og 0.5%.
9. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
10. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

1. Projekt Prognoser

Problemstilling: Hvordan kan man opstille prognoser under antagelse af konstant vækst?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

En formue antages at vokse med konstant vækst. Ud fra to kendte datasæt ønskes opstillet prognoser for en fremtidig værdi, samt for, hvornår en bestemt værdi nås.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over den hidtidige kursudvikling, hvor x er antal dage og y er kursen

x	y = ?
2	10
5	30
8	?
?	60

1. Lineær vækst y = a*x + b	x: +1, y: +a (stigningstallet)
2. Exponentiel vækst y = b*a^x	x: +1, y: + r% (vækstprocenten, a = 1+r)
3. Potens vækst y = b*x^a	x: +1%, y: + a% (elasticiteten)

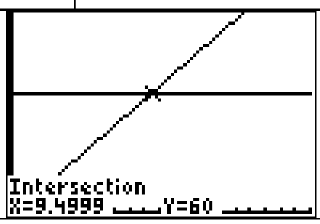
3. Løsning af det matematiske problem

Først findes ligningerne for y ved regression. Vi indtaster datasættene i formelregnerens lister under Stat.
Ønskes en lineær model vælges LinReg Y1.
Ønskes en eksponentiel model vælges ExpReg Y1.
Ønskes en potens model vælges PowerReg Y1.

Lineær vækst

y = ?	y = 6.667*x – 3.333
Test Trace	x = 2 og 5 giver y = 10 og 30
x = 8	y = 6.667*8 – 3.333 = 50
Test	Trace x = 8 giver y = 50

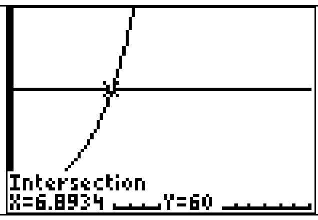
x = ?	y = 6.667*x – 3.333
y = 60	60 = (6.667*x)– 3.333 60 + 3.333 = 6.667*x 63.333/6.667 = x 9.5 = x
Test1	60 = 6.667*9.5– 3.333 60 = 60
Test2	MathSolver 0 = Y1-60 Giver x = 9.5
Test3	Grafisk aflæsning med y2=60 giver x = 9.5 (intersection)



Eksponentiel vækst

y = ?	y = 4.807 * 1.442^x
Test Trace	x = 2 og 5 giver y = 10 og 30
x = 8	y = 4.807 * 1.442^8 = 89.9
Test	Trace x = 8 giver y = 89.9

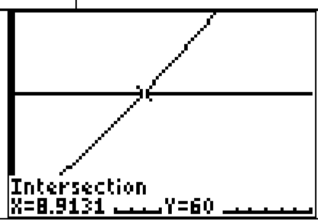
x = ?	y = 4.807 * 1.442^x
y = 60	60 = 4.807 * (1.442^x) 60/4.807 = 1.442^x log(60/4.807)/log1.142 = x 6.89 = x
Test1	60 = 4.807 * 1.442^6.89 60 = 60
Test2	MathSolver 0 = Y1-60 Giver x = 6.89
Test3	Grafisk aflæsning med y2=60 giver x = 6.89 (intersection)



Potens vækst

y = ?	y = 4.356*x^1.199
Test Trace	x = 2 og 5 giver y = 10 og 30
x = 8	y = 4.356*8^1.199 = 52.7
Test	Trace x = 8 giver y = 52.7

x = ?	y = 4.356*x^1.199
y = 60	60 = 4.356*(x^1.199) 60/4.356 = x^1.199 1.199√(60/4.356) = x 8.91 = x
Test1	60 = 4.356*8.91^1.199 60 = 60
Test2	MathSolver 0 = Y1-60 Giver x = 8.91
Test3	Grafisk aflæsning med y2=60 giver x = 8.91 (intersection)



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set at vi med regressionsligninger kan opstille prognoseligninger til at forudsige fremtidige værdier, samt for, hvornår en bestemt værdi nås. De tre sæt svar er forskellige, da de bygger på forskellige antagelser.
Lineær vækst forudsætter at stigningstallet er konstant.
Eksponentiel vækst forudsætter at vækstprocenten er konstant.
Potens vækst forudsætter at elasticiteten er konstant.

2. Projekt Befolkningsvækst og Fødevarevækst

Problemstilling: Hvornår vil befolkningstallet overstige fødevaremængden

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Den engelske økonom Malthus (1766-1834) forudsagde omkring år 1800 en kommende fødevarekrise: "Da verdens befolkningen vokser eksponentielt og fødevaremængden lineært, vil befolkningstallet en dag overhale fødevaremængden med hungersnød til følge" (Malthus' befolkningsprincip). Har Malthus ret?

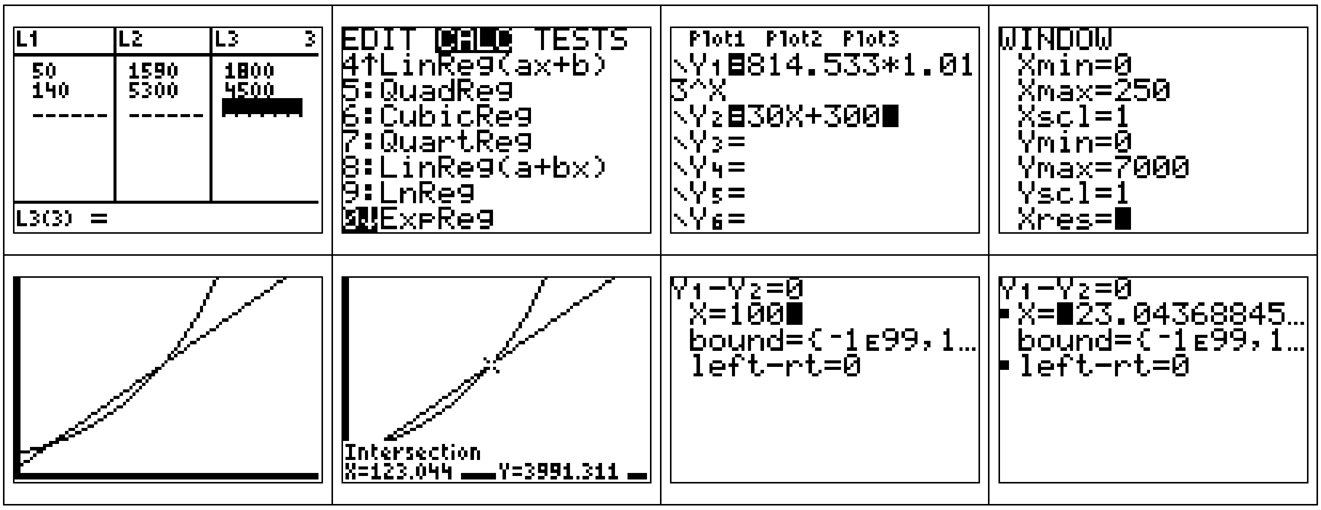
2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over tiden x angivet som antal år efter 1850; og verdens befolkning, der antages at være 1.59 mia i 1900 og 5.3 mia i 1990; og verdens fødevareproduktion, der antages at være 1.800 mia. dagsrationer i 1900 og 4.5 mia. dagsrationer i 1990. Befolkningstallet antages at vokse eksponentielt, og fødevaremængden antages at vokse lineært. Tabellens gyldighedsområde antages at være 0 < x < 250.

x År efter 1850	Y1 Verdens befolkning i mio.	Y2 Verdens fødevareproduktion i mio. dagsrationer
(1900) 50	1590	1800
(1990) 140	5300	4500

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-82 indlægges x-tal som liste L1, og y-tal som listerne L2 og L3.
Formlen for befolkningstallet bestemmes ved ExpReg L1, L2, Y1. Resultat y1= 815*1.013^x.
Dvs. når x er 0 i 1850 er befolkningstallet y=815; og når x vokser med 1 vokser befolkningstallet med 1.3%.
Formlen for fødevaremængden bestemmes ved LinReg L1, L3, Y2. Resultat y1= 300 + 30x.
Dvs. når x er 0 i 1850 er fødevaremængden y=300; og når x vokser med 1 vokser fødevaremængden med 30.
Perioder med hungersnød forekommer hvor Y1 er større end Y2.
Skæringspunkterne mellem Y1 og Y2 findes med 'Calc Intersection' til ca. x = 30 og 123.
Dvs. ifølge modellen var der hungersnød fra 1850 til 1880, og igen efter 1973.
Antages i stedet, at verdens befolkning vokser med 1% om året, og fødevaremængden med 40 om året vil formlerne blive Y3= 815*1.01^x, og Y4 = 300+40x, hvis skæringspunkter da bliver ca. x = 16 og x = 258.
Dvs. i dette tilfælde var der hungersnød fra 1850 til 1866, og igen efter 2108.
Skæringspunkterne kan kontrolleres ved at bruge MathSolver, og indtaste et gæt.



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Malthus har ret i, at der vil opstå hungersnød, hvis verdens befolkning fortsætter med at vokse eksponentielt, og verdens fødevaremængde fortsætter med at vokse lineært, for en krum kurve vil altid overhale en lige. Hvis fødevaremængden vokser med 30 mio. dagsrationer pr. år, vil hungersnøden indtræde år 1973, hvis verdens befolkning vokser med 1.3% pr. år, og i år 2108 hvis verdens befolkning vokser med 1% pr. år og fødevareproduktionen vokser med 40/år. Dog tidligere, hvis en del fødevarer bruges til brændstof til biler.

3. Projekt Afstandsbestemmelse

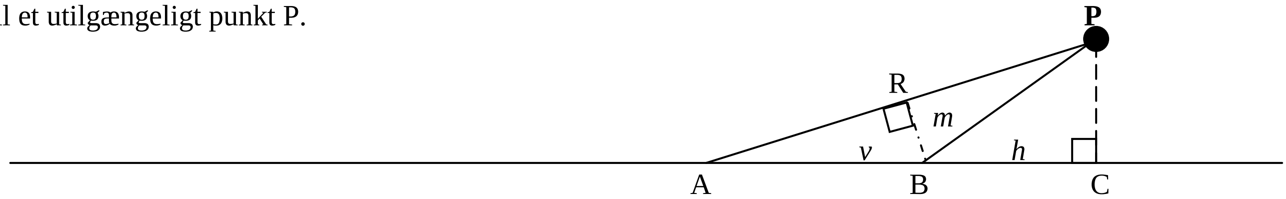
Problemstilling: Hvordan bestemmes afstanden til et utilgængeligt punkt?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

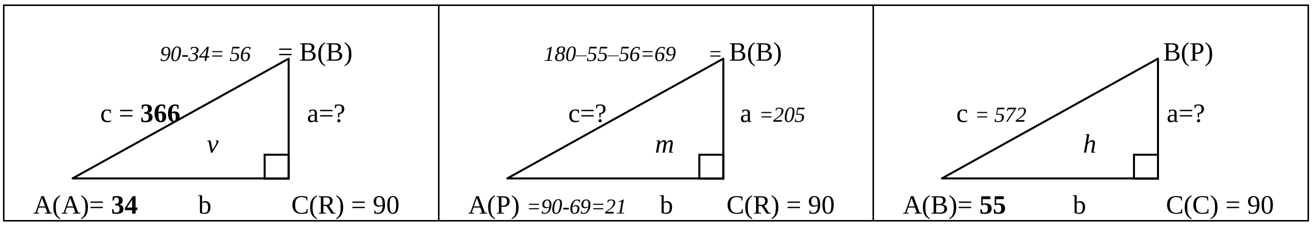
Fra en basislinie ønsker vi at bestemme afstanden til et utilgængeligt punkt P.



2. Matematisk problem

Fra kendt basislinie AB måles sigtevinkler fra A og B til det utilgængelige punkt P.
Af de tre retvinklede trekanter ABR, BRP og BCP beregnes RB, BP samt endelig den ønskede afstand PC.

Måleværdier: AB = 366 cm, vinkel PAC = 34 grader, vinkel PBC = 55 grader



3. Løsning af det matematiske problem

Vi opstiller 3 formelskemaer

Trekant ABR

a = ?	$\sin A = \frac{a}{c}$
A = 34 c = 366	$\sin 34 = \frac{a}{366}$ sin34 * 366 = a 205 = a
Test1 ☺	$\sin 34 = \frac{205}{366}$ 0.559 = 0.560
Test2 ☺	Math Solver $0 = \frac{x}{366} - \sin 34$ giver x = 205

Trekant PBR

c = ?	$\sin A = \frac{a}{c}$
A = 21 a = 205	$\sin 21 = \frac{205}{c}$ c * sin21 = 205 $c = \frac{205}{\sin 21}$ c = 572
Test1 ☺	$\sin 21 = \frac{205}{572}$ 0.358 = 0.358
Test2 ☺	Math Solver $0 = \frac{205}{x} - \sin 21$ giver x = 572

Trekant PBC

a = ?	$\sin A = \frac{a}{c}$
A = 55 c = 572	$\sin 55 = \frac{a}{572}$ sin55 * 572 = a 469 = a
Test1 ☺	$\sin 55 = \frac{469}{572}$ 0.819 = 0.820
Test2 ☺	Math Solver $0 = \frac{x}{572} - \sin 55$ giver x = 469

Alternativ: I trekant PAB bruges sinus-relationen til at bestemme PB.
Vinkel PBA = 180- vinkel PBC = 180-55 = 125. Vinkel APB = 180- 34-125 = 21

$\frac{a}{\sin A} = \frac{p}{\sin P}$, dvs. $\frac{a}{\sin 34} = \frac{366}{\sin 21}$, dvs. $a = \frac{366}{\sin 21} * \sin 21 = 572$

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

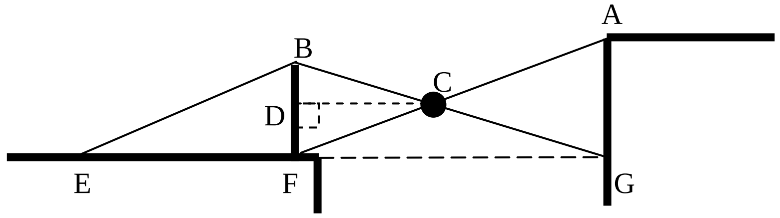
Ved hjælp af trekantsregning har vi har bestemt afstanden til det utilgængelige punkt PC til 469 cm.

4. Projekt Broen

Problemstilling: Hvordan dimensioneres en bro?

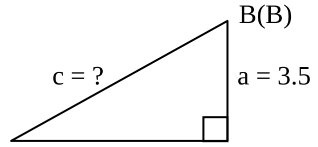
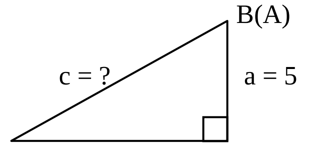
En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden Over en kløft bygges en hængebro af stål fastgjort til klippevæggen og en stolpe. De tre stållængder ønskes bestemt, samt samlingspunktet over kløften. Den venstre fastspændings-vinkel skal være 30 grader.	

2. Matematisk problem

Af de retvinklede trekanter EFB, GFB og FGA beregnes BE, BG og FA. C bestemmes som skæringspunkt mellem de to rette linier BG og FA.
Måleværdier: vinkel FEB = 30 grader, FB = 3.5m, FG = 8m + 1m = 9m og AG = 5m.

		Vi indlægger et koordinatsystem med nulpunkt i F. Herved fremkommer koordinaterne: F: (0,0) og A: (9,5), samt B: (0,3.5) og G: (9,0). Vi finder ligningerne for FA og BG ved lineær regression.

3. Løsning af det matematiske problem

Vi opstiller formelskemaer

Trekant EFB

c = ?	$\sin A = \frac{a}{c}$
A = 30 a = 3.5	$\sin 30 = \frac{3.5}{c}$ sin30*c = 3.5 c = 3.5/sin30 c = 7.0
Test1 ☺	$\sin 30 = \frac{3.5}{7}$ 0.5 = 0.5
Test2 ☺	Math Solver $0 = \frac{3.5}{x} - \sin 30$ giver x = 7

Trekant FGA og GFB

c = ?	$a^2 + b^2 = c^2$
a = 5 b = 9	$5^2 + 9^2 = c^2$ $\sqrt{(106)} = c$ 10.30 = c
Test1 & Test2	

c = ?	$a^2 + b^2 = c^2$
a = 3.5 b = 9	$3.5^2 + 9^2 = c^2$ $\sqrt{(93.25)} = c$ 9.66 = c

Linierne BG og FA

BG: ?	y = ax + b
Test	y = – 0.389x + 3.5 Fundet ved LinReg L1, L2, Y1 Trace x=0 giver 3.5 Trace x=9 giver 0 StatPlot passer

Tilsvarende findes
FA: ? y = 0.556x

Calc Intersection giver
x = 3.71 og y = 2.06

I trekant FDC er DC = 3.71 og FD = 2.06
Pythagoras giver: FC = √(3.71^2 + 2.06^2) = 4.24

I trekant BDC er DC = 3.71 og FD = 3.6-2.06 = 1.54
Pythagoras giver: BC = √(3.71^2 + 1.54^2) = 4.02

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Ved hjælp af trekantsregning har vi har bestemt de tre stållængder:

EB = 7.00 m, FA = 10.30 m og BG = 9.66.

Samlingspunktet er bestemt ved at FC = 4.24 m og BC = 4.02 m.

Som ekstra kontrol optegnes broen og bygges af piberensere i målestoksforholdet 1:100.

5. Projekt Statistik

Problemstilling: Hvordan kan vi kort beskrive mange forskellige tal fra et spørgeskema?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

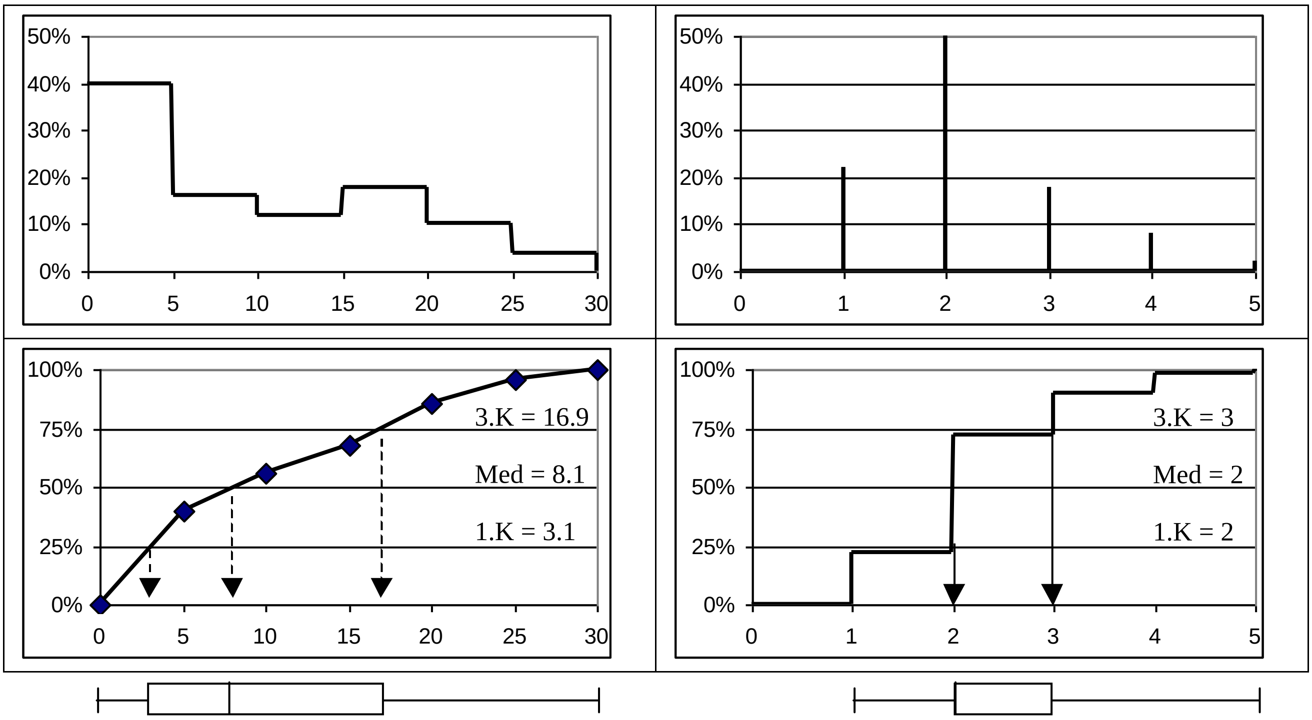
1. Problemet fra virkeligheden
Tal fra besvarelse af et spørgeskema vil variere uforudsigeligt og kan derfor ikke beskrives med en formel. Hvordan kan vi give en samlet kort beskrivelse af mange forskellige talværdier?

2. Opstilling af det matematiske problem
I et spørgeskema indgik disse 2 spørgsmål: Hvor langt har du til skole? Hvor mange børn har din mor født? Svarene kan ikke forud-siges, men kan bagud-siges ved at blive opstillet i en tabel indeholdende observationer og hyppigheder. Afstands-tallene grupperes, medens børneantallet ikke grupperes. Et tal medtages første gang, det nævnes.

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.	Middeltal, Gns.
00-05	20	20/50 = 0.40	0.40	2.5*0.40 = 1.00
05-10	8	0.16	0.56	7.5*0.16 = 1.20
10-15	6	0.12	0.68	1.50
15-20	9	0.18	0.86	3.15
20-25	5	0.10	0.96	2.25
25-30	2	0.04	1.00	1.00
	50	1.00		M = 10.2

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.	Middeltal, Gns.
1	11	11/50 = 0.22	0.22	1*0.22 = 0.22
2	25	0.50	0.72	2*0.50 = 1.00
3	9	0.18	0.90	0.54
4	4	0.08	0.98	0.32
5	1	0.02	1.00	0.10
	50	1.00		M = 2.2

3. Løsning af det matematiske problem
Frekvensen angiver de enkelte hyppigheder i procent af alle svar. F.eks. lå 10% af alle svar i området 20-25, dvs. 10% af de svarende har fra 20 km til og med 25 km til skole. Frekvensen illustreres grafisk med et histogram ved grupperede og et pindediagram ved ikke-grupperede observationer.
Den kumulerede frekvens opsummerer frekvenserne. F.eks. har 86% af de svarende 20 km til skole eller derunder. Den kumulerede frekvens illustreres med en sumkurve. På sumkurven aflæses 1. kvartil, 2. kvartil (medianen) og 3. kvartil ved hhv. 25%, 50% og 75%. Et boks-plot viser mindste og største observation samt de tre kvartiler.
Middeltallet eller gennemsnittet angiver hvor langt de svarende havde til skole, hvis de alle havde lige langt. Ved grupperede observationer benyttes intervallernes midter-tal ved beregning af middeltal.
Tallene kan også findes ved at indtaste observationer og hyppigheder som lister i formelregneren, og derefter benytte Stat Calc 1-Var Stats L1, L2. Igen bruges midter-tal ved grupperede observationer.



4. Løsning af problemet fra virkeligheden
Uforudsigelige tal kan ikke forud-siges af en formel, men kan bagud-siges af en tabel over observationer og hyppigheder. Ud fra tabellen kan beregnes tallenes middeltal. Tallenes frekvenser kan illustreres med histogram eller et pindediagram. Ud fra de opsummerede frekvenser aflæses tallenes tre kvartiler, der sammen med yderværdierne beskrives i et boks-plot.

6. Projekt Golf

Problemstilling: Hvordan sendes en golfkugle i et hul bag en hæk?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Fra en placering på en 2 meter høj flad bakke skal en golfbold sendes over en 3 meter høj hæk, der befinder sig på bakken 2 meter væk, og ramme i et hul, der befinder sig 12 meter væk i højde nul.
Hvad er boldens banekurve? Hvilken højde har bolden i afstanden 10 meter? Hvornår har bolden højden 6 meter? Hvor højt når bolden op? Hvilken retning har bolden i begyndelsen? Hvilken retning har bolden ved nedslaget?

2. Opstilling af det matematiske problem

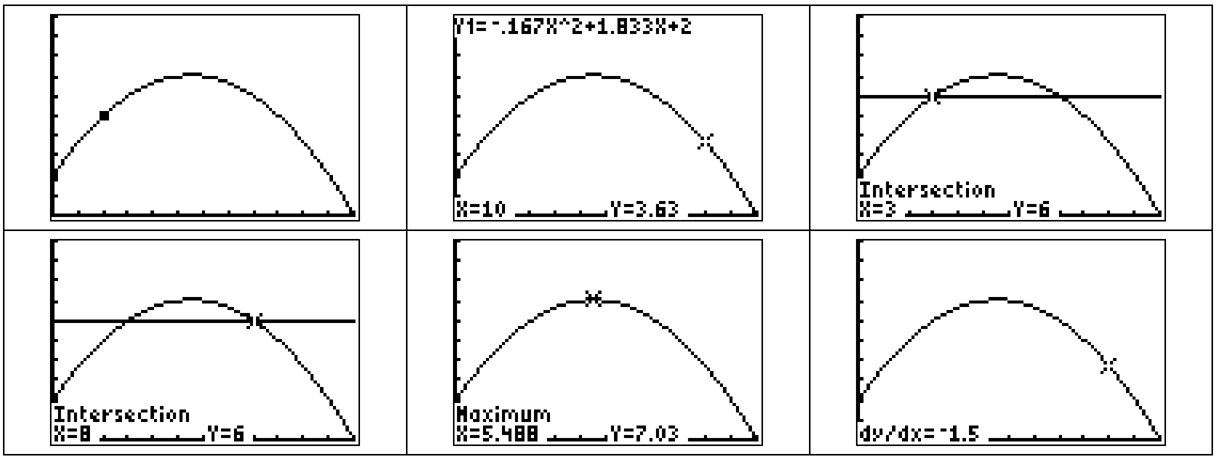
Vi opstiller en tabel over længde x og højde y. Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være $0<x<12$.

Længde x	Højde y	Retning v
0	2	?
2	5	
12	0	?
10	?	?
?	6	

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-82 indlægges x-tal og y-tal som listerne L1 og L2. Med 3 talpar vælges kvadratisk regression (et 2.grads polynomium), der giver formlen y= -0.167x^2+1.833x +2, som indlægges som y1.Herefter besvares de stillede spørgsmål ved brug af ligningsskemaer og grafisk aflæsning. Y-tal bestemmes med 'Trace'. X-tal bestemmes med 'Calc Intersection'. Maximum med 'Calc Maximum', stejlhed med 'Calc dy/dx'.

For at finde boldens retning hhv. i begyndelsen, ved nedslaget, i afstanden 10 meter og i højden 6 meter, beregnes stejlhedstallet dy/dx i hhv. x = 0, x = 12, og x = 10. Herefter kan vinklen v bestemmes af ligningen tan v = dy/dx.



y = ?	y = y1
x=10	y = y1(10) = 3.667
Test	Grafisk aflæsning med Trace x=10 giver y=3.67

x = ?	y = y1
y = 6	Math solver 0 = y1 - 6 giver x =3 og x = 8
Test1	y1(3) = 6, y1(8)= 6
Test2	Grafisk aflæsning med y2=6 giver x = 3 og 8 (Calc intersection)

ymax=?	y = y1
	Calc maximum giver y = 7.042 ved x = 5.5
Test	dy/dx ≈ 0 ved x = 5.5

v = ?	tan v = dy/dx
x = 0	tan v = 1.833 v = tan-1(1.833) v = 61.4

v = ?	tan v = dy/dx
x = 12	tan v = -2.167 v=tan-1(-2.167) v =- 65.2

v = ?	tan v = dy/dx
x =10	tan v = -1.5 v = tan-1(-1.5) v = -56.3

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Boldens banekurve er en parabel. I afstanden 10 meter har bolden højden 3.667m. Bolden har højden 6 meter i afstanden x = 3 og x =8. Bolden når højst op i højden y = 7.04m. boldens retning hhv. i begyndelsen, ved nedslaget, i afstanden 10 meter er hhv. 61.4 grader, -65.2 grader og -56.3 grader.

7. Projekt Indsamling, Lafferkurve

Problemstilling: Hvordan kan man optimere udbyttet af en indsamling?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vi ønsker at indsamle et beløb til Operation Dagsværk blandt skolens 500 elever ved at sælge billetter til en fast pris. Hvilken af følgende tre indsamlingsmodeller giver det største bidrag:

A) Vi undlader markedsføring. B) Vi foretager markedsføring. C) Vi foretager markedsføring og udskriver et lotteri.

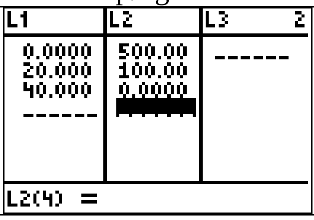
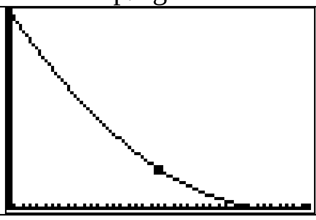
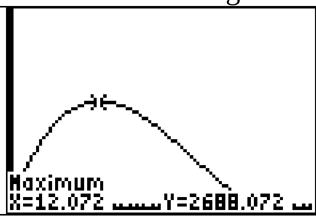
2. Opstilling af det matematiske problem

Efterspørgslen Y1 vil afhænge af den fastsatte pris x. Det indsamlede beløb vil da være **Y2 = Y1*x**.

3. Løsning af det matematiske problem

Model A. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgselen falder hurtigt så kun 100 kunder vil give 20 kr.

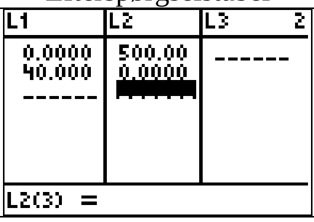
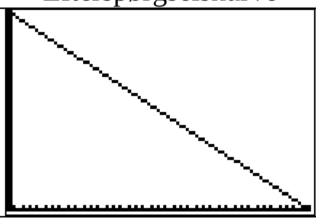
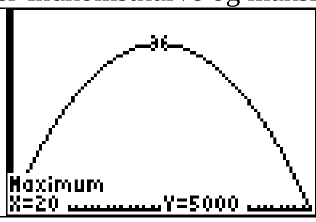
Efterspørgselskurve: 3 datasæt, dvs. 2 grads polynomium. ’QuadReg’ giver Y1 = .375*x^2 – 27.5*x + 500

<table>
<tr><th>Efterspørgselstabel</th><th>Efterspørgselskurve</th><th>Laffer-indkomstkurve og maksimum</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

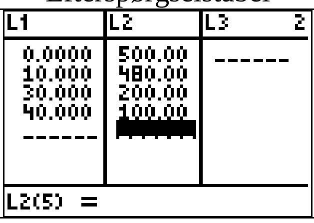
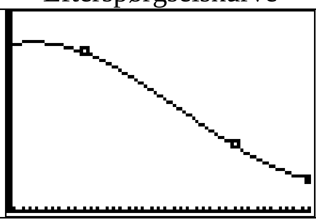
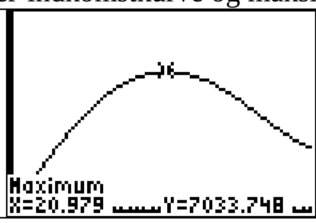
Test: Calc dy/dx ≈ 0 i x = 12.07. dy/dx = stigningstallet

Model B. Vi antager, at en markedsføring vil bevirke, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgselen falder jævnt.

Efterspørgselskurve: 2 datasæt, dvs. 1 grads polynomium. ’LinReg’ giver Y1 = -12.5*x + 500

<table>
<tr><th>Efterspørgselstabel</th><th>Efterspørgselskurve</th><th>Laffer-indkomstkurve og maksimum</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Model C. Vi laver en markedsføring af et lotteri med 1 hovedpræmie 500 kr og 3 sidepræmier på 200 kr. Vi antager, at dette vil bevirke, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at 480 kunder vil give 10 kr, 400 kunder vil give 20 kr, 200 kunder vil give 30 kr og 100 kunder vil give 40 kr. Efterspørgselskurve: 4 datasæt, dvs. 3 grads polynomium. ‘CubicReg’ giver Y1 =0.013*x^3 – 0.933*x^2 + 6*x +500

<table>
<tr><th>Efterspørgselstabel</th><th>Efterspørgselskurve</th><th>Laffer-indkomstkurve og maksimum</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Indsamling uden markedsføring vil give en indkomst på 2688 kr ved en billetpris på 12 kr

Markedsføring uden lotteri vil give en indkomst på 5000 kr ved en billetpris på 20 kr.

Markedsføring med lotteri vil give en indkomst på 7034 – (500 + 3*200) = 5934 kr ved en billetpris på 21 kr.

Lafferkurven bruges som argument for, at skatteindkomsten godt kan øges hvis skatteprocenten sættes ned.

Efterspørgselskurven fortæller da, at med voksende skatteprocent vil andelen af sort arbejde stige.

8. Projekt Kørsel

Problemstilling: Hvor langt og hvordan kørte Peter?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Ved kørsel svarer hastigheden 100 km/t til 100*1000/(60*60) = 27.8 m/s.. Under Peters kørsel blev hastigheden målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s. Hvornår begyndte og sluttede kørslen? Hvad var farten efter 12sekunder? Hvornår var farten 25m/s? Hvornår blev der accelereret? Hvornår blev der bremset? Hvad var den maksimale fart? Hvor mange meter kørtes der I de forskellige 5sekunders intervaller? Hvad var accelerationen i begyndelsen af disse intervaller. Hvor langt kørtes I alt?

2. Opstilling af det matematiske problem

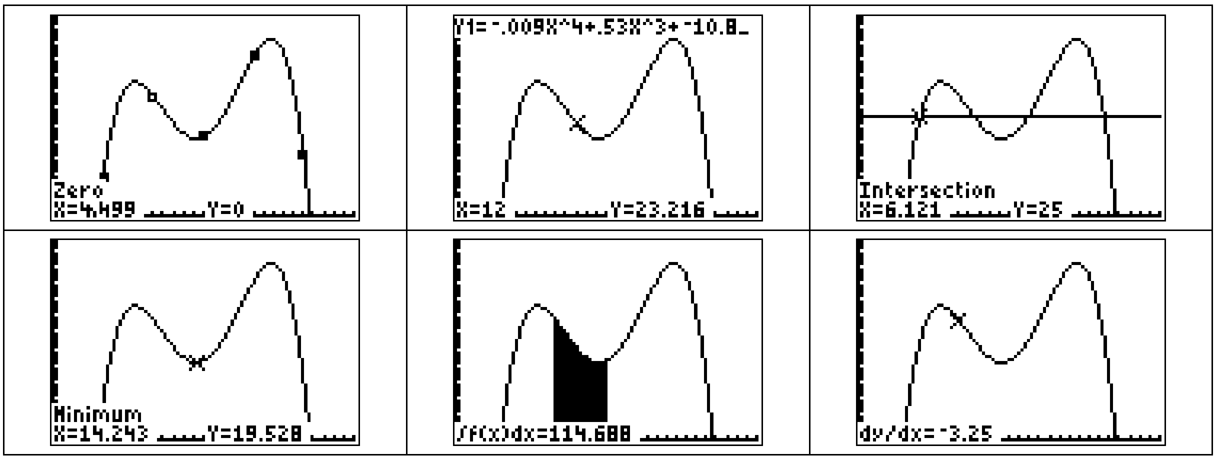
Vi opstiller en tabel over tid x og fart y.
Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være 0<x<30.

Tid x sek	Fart y m/s
5	10
10	30
15	20
20	40
25	15

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-82 indlægges x-tal og y-tal som listerne L1 og L2. Med 5 talpar vælges kvartisk regression (et 4.grads polynomium med en 3-dobbelt parabel), der giver formlen y = -0.009x^4+0.53x^3-10.875x^2+91.25x -235, som indlægges på y1. Herefter besvares de stillede spørgsmål ved ligningsskemaer og grafisk aflæsning.

Start- og sluttidspunkt findes med 'Calc Zero'. Y-tal bestemmes med 'Trace'. X-tal bestemmes med 'Calc Intersection'. Maximum og minimum med 'Calc Maximum/Minimum'. Det samlede meter-tal fås ved at opsummere m/s*s = ∫y1dx. Acceleration fås som stejlhed med 'Calc dy/dx'.



y = ?	y = y1
x=12	y = y1(12) = 3.667
Test	Grafisk aflæsning med Trace x = 12 giver y = 23.216

x = ?	y = y1
y = 25	Math solver 0 = y1 - 25 giver x =6.12 og …
Test1	y1(3) = 6, y1(8)= 6
Test2	Grafisk aflæsning med 2=25 giver x = 6.12, 11.44, 16.86 og 24.47 (Calc intersection)

ymax=?	y = y1
	Calc maximum Giver y = 7.042 ved x = 5.5
Test	dy/dx = 0 ved x = 5.5

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Kørslen begyndte efter 4.50 sek og sluttede efter 25.62 sek. Efter 12sekunder var farten 23.2 m/s. Farten var 25m/s efter 6.12 sek, 11.44 sek, 16.86 sek og 24.47 sek. Der blev accelereret i tids-intervallerne (4.50; 8.19) og (14.24; 21.74). Der blev bremset i tids-intervallerne (8.19;14.24) og (21.74;25.62).
Max-fart var 44.28 m/s = 159 km/t. efter 21.7 sek. I de forskellige tids-intervaller (5;10), (10;15), (15;20) og (20;25) kørtes der hhv. 142.8 m, 114.7 m, 142.8 m og 189.7 m. Accelerationen i begyndelsen af disse intervaller var hhv. 17.75, -3.25, 1.25, 4.25, -21.25 m/s^2. I alt kørtes der 597.4 m.

9. Projekt Overtagelsesforsøg

Problemstilling: Hvor meget kostede et overtagelsesforsøg?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Selskab A forsøger at overtage selskab B ved at opkøbe 1B-aktie pr. dag i 30 dage. B-aktien svinger i kurs og var 50, 80, 40 og 90 efter hhv. 0, 10, 20 og 30 dage. Hvad var kursen efter 4 dage? Hvornår var kursen 70 Kkr? Hvornår stiger kursen? Hvornår falder kursen? Hvornår topper og bunder kursen? Hvor mange Kkr. brugtes der I de forskellige 10 dages intervaller? Hvad var kursstigningen i begyndelsen af disse intervaller.

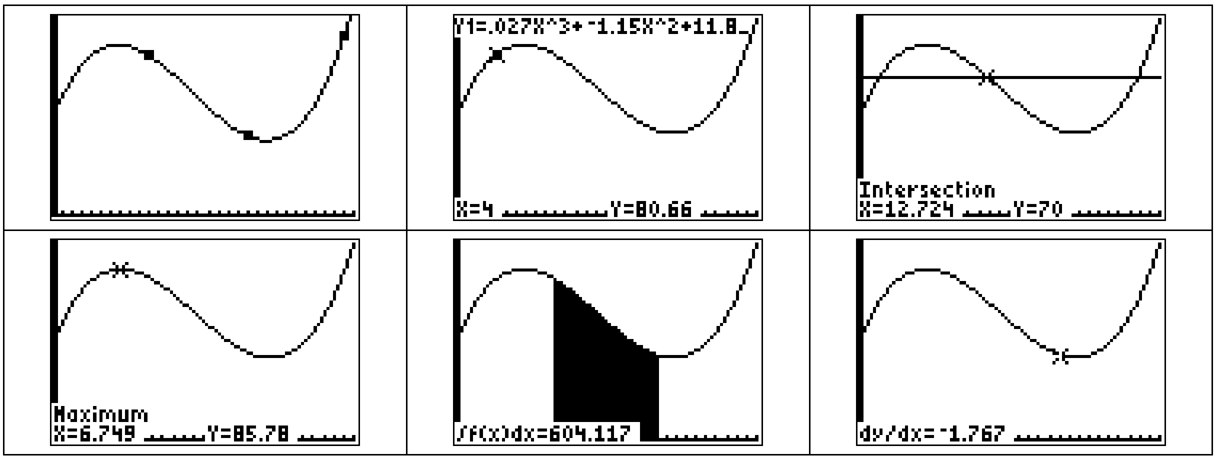
2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over tid x og køb y, som svarer til kursen på 1 B-aktie.
Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være 0<x<31.

Tid x dage	Køb y Kkr/dag
0	50
10	80
20	40
30	90
4	?
?	70

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-82 indlægges x-tal og y-tal som listerne L1 og L2. Med 4 talpar vælges kubisk regression (et 3.grads polynomium med en dobbelt-parabel), der giver formlen y = 0.027x^3 – 1.150x^2 + 11.8333x + 50, som indlægges som y1. Test med Trace og StatPlot. De stillede spørgsmål besvares ved brug af formelskemaer og grafisk aflæsning. Y-tal bestemmes med 'Trace'. X-tal bestemmes med 'Calc Intersection'. Maximum og minimum med 'Calc Maximum/Minimum'. Det samlede Kkr-tal fås ved at opsummere Σ (Kkr/dag)*dag = ∫Y1*dx, der beregnes med 'Calc ∫f(x)dx' da Y1 = f(x). Kursstigningen fås som stejlhed med 'Calc dy/dx'.



y = ?	y = y1
x=4	y = y1(4) = 80.64
Test	Grafisk aflæsning med Trace x = 4 giver y = 80.64

x = ?	y = y1
y = 70	Grafisk aflæsning med y2=70 giver x = 2.1, 12.6 og 28 5 (Calc intersection)
Test	Math solver 0 = y1 – 70 giver x =2.1 og …

ymax=?	y = y1
	Calc maximum Giver y = 85.69 ved x = 6.72
Test	dy/dx ≈ 0 ved x = 6.72

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Efter 4 dage var kursen 80.66. Kursen var 70 efter 2.1, 12.7 og 27.8 dage. Kursen stiger i tids-intervallerne (0; 6.7) og (21.6; 30). Kursen falder i tids-intervallet (6.7; 21.6). Kursen topper med 85.8 ved x = 6.7. Kursen bunder med 41.1 ved x = 21.6. I de forskellige tids-intervaller (0;10), (10;20) og (20;30) købtes for hhv. 775.8, 604.1 og 562.4 Kkr. I alt købtes for 1942 Kkr.
Kursstigningen i begyndelsen af disse intervaller var hhv. 11.8, -3.1, -1.8 og 15.7 Kkr/dag.

10. Projekt Opsparing og Pension

Problemstilling: Hvor meget pension kan en opsparing give?

En matematisk model:

$$\begin{array}{lccc} \text{Matematik} & \boxed{\text{Problem}} & \longrightarrow & \boxed{\text{Løsning}} \\ & \uparrow & & \downarrow \\ \text{Virkelighed} & \boxed{\text{Problem}} & & \boxed{\text{Løsning}} \end{array}$$

1. Problemet fra virkeligheden

Ved en opsparing indskydes et fast opsparingsbeløb hver måned på en bankkonto.
Når opsparingen afsluttes, kan opsparingen bruges til at udbetale et fast pensionsbeløb hver måned fra bankkontoen. Hvad er forholdet mellem det månedlige opsparingsbeløb og pensionsbeløb?

2. Opstilling af det matematiske problem

Ved opsparing gælder to formler, den første gælder for ét enkelt indskud, den anden for månedlige indskud:
1) K = Ko(1+r)^n = Ko(1+R). K: slutkapital, Ko: startkapital, r: mdl. rente, R: samlet rente, n antal måneder.
2) K/a = R/r, K: slutkapital, a mdl. indskud, r: mdl. rente, R: samlet rente. #
Vi indskyder 1000 kr./måned i 30 år. Hvilken månedlig pension kan udbetales i 10 år?. Renten er 0.4%/md.

3. Løsning af det matematiske problem

Først findes den årlige rente R: 1+R = (1+r)^n = (1+0.004)^12, dvs. R = 1.049 –1 = 0.049 = 4.9% per år.
Så findes den samlede 30årige rente R: 1+R = (1+r)^n = (1+0.004)^(30*12) = 4.209.
Dvs. R = 4.209-1 = 3.209 = 321%.
Den rene rente er 30*12*0.4% = 144%. Dvs. rentes rente er 321% - 144% = 177%.
Med a = 1000, r = 0.4% bliver opsparingen efter 360 indskud K = a*R/r = 1000*3.209/0.004 = 802147.
Efter 30 år er eget bidraget 1000*360 = 360000. Rentebidraget er 802147 –360000 = 442147.
Vi beregner opsparingen efter 10, 20 og 30 år:

Måneder	120	240	360
Opsparing	153632	401675	802147

Skal opsparingen udbetales som pension over 10 år, benyttes to konti.
På konto 1 er opsparingen til forrentning, og vokser da på 10 år til K = 802147*(1+0.004)^120 = 1295089.
På konto 2 laves en 'negativ opsparing', hvor der månedlig udbetales et fast beløb a, og hvor de to konti skal balancere efter 10 år: K = a*R/r = a*(1.004^120 –1) / 0.004 = 1295089.
Løses denne ligning fås a = 8430.
Forholdet mellem udbetaling og indbetaling er da (10*12*8430)/(30*12*1000) = 2.8.
Gentages beregningerne med en månedlig rente på 0.3% og 0.5% fås:

Mdl. rente	Årlig rente	Opsparet beløb	Månedlig pension	Forhold mellem ud- og indbetaling
0.3%	3.7%	646640	6425	(10*12*6425)/(30*12*1000) = 2.1
0.4%	4.9%	802147	8430	(10*12*8430)/(30*12*1000) = 2.8
0.5%	6.2%	1004515	11152	(10*12*11152)/(30*12*1000) = 3.7

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Ved en opsparing indskydes et fast opsparingsbeløb hver måned på en bankkonto. Kontoen vokser, fordi der hver måned tilføres tre beløb: et nyt indskud, rente af det samlede indskud, samt rente af de tilskrevne renter (rentes rente).
Når opsparingen afsluttes, fortsætter den med at vokse, dog bliver det månedlige indskud erstattet af en månedlig udbetaling, pension. Med et månedligt indskud på kr. 1000 i 30 år kan det hvert måned udbetales kr. 8430 i 10 år. Med en månedlig rente på hhv. 0.3%, 0.4% og 0.5% udbetales hhv. 2.1, 2.8 og 3.7 gange mere end der indbetales. Dog kan prisstigninger i den 40årige periode, inflation, nedsætte denne faktor.

Bevis for opsparingsformlen ved konstant indskud på a kr og rente r%:
På konto 1 indsættes a/r, den årlige rente a/r*r = a overføres til konto 2 som fast årligt indskud a sammen med årlig rente til begge konti. Konto 2 vil da indeholde dels en opsparing K, dels den samlede rente R af a/r, altså a/r*R. Dvs. K = a/r*R eller K/a = R/r.