Projekter til Matematik

B

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net 2014

Indholdsfortegnelse

1. Projekt Afstandsbestemmelse

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at bestemme afstanden fra en basislinie AC til et utilgængeligt punkt B

1. Udmål en basislinie AC og sigtevinklerne til B fra A og C.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de øvrige stykker i trekant ABC, samt højden h.
4. Beregn vinkel B.
5. Beregn siden AB.
6. Beregn siden CB.
7. Beregn højden h samt siden AD, hvor D er det punkt på AC, som har mindst afstand til C.
8. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til mundtlig eksamen.
9. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

2. Projekt Prognoser

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at beregne to fremtidige værdier for en formue, der vokser med konstant vækst: Når formuen efter 2 og 5 måneder er hhv. 10 og 30 enheder, hvad vil den da være efter 8 måneder, og hvornår vil den være 60 eneheder?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier
4. Opstil en lineær model for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
5. Opstil en eksponentiel model for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
6. Opstil en potensmodel for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
8. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

3. Projekt Lejemål

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at sammenligne to forskellige lejemål: Hos A er lejeprisen 40kr fast plus 3.2 kr/dag. Hos B er lejeprisen 60kr fast plus 2.5 kr/dag

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier.
4. Opstil en lineær model for væksten og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
5. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
6. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

4. Projekt Opsparing og Pension

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at finde den månedlige pension over 10 år, som kan kommer fra en opsparing på 1000 kr. hver måned i 30 år. Renten er 0.4% pr. md.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.

2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier.
4. Opstil en model for opsparingen og bestem algebraisk og geometrisk den opsparede kapital efter 30 år.
5. Opstil en model for pensionsudbetalingen og bestem algebraisk og geometrisk den månedlige pension over 10 år.
6. Bestem forholdet mellem det indskudte og det udtagne beløb.
7. Gentag beregningerne med en månedlig rente på 0.3% og 0.5%.
8. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
9. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

5. Projekt Prisdannelse, Udbud og Efterspørgsel

Problem fra virkeligheden
For en given vare kendes varens udbudskurve og efterspørgselskurve. Dvs. vi kender sammenhængen mellem varens pris, og den udbudte og efterspurgte varemængde. Hvis udbud er større end efterspørgsel må prisen sænkes for at øge efterspørgselen og sænke udbuddet. Hvis udbud er mindre end efterspørgsel må prisen øges for at sænke efterspørgselen og øge udbuddet. Ligevægtsprisen opstår derfor hvor udbud er lig med efterspørgsel.
Vi ønsker at finde ligevægtsprisen hvis en pris på 2 kr., 4 kr. og 6 kr. med førere et udbud på hhv. 40, 60 og 75 enheder samt en efterspørgsel på hhv. 80, 50 og 30 enheder.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne ligevægtsprisen.
4. Opstil ud fra priserne 2 og 4 en lineær model for udbud og efterspørgsel, og bestem ligevægtsprisen algebraisk og geometrisk.
5. Opstil ud fra priserne 2, 4 og 6 en kvadratisk model for udbud og efterspørgsel, og bestem
6. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
7. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

6. Projekt Indsamling, Lafferkurve

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at indsamle et beløb til Operation Dagsværk blandt skolens 500 elever ved at sælge billetter til en fast pris. Hvilken af følgende tre indsamlingsmåder giver det største bidrag?
A. Uden markedsføring. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgslen falder hurtigt, så kun 100 kunder vil give 20 kr.
B. Med markedsføring. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgslen falder jævnt.
C. Med lotteri med 1 hovedpræmie på 500 kr og 3 sidepræmier på 200 kr. Et spørgeskema med spørgsmålet 'hvad vil du maksimalt betale?' viser, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at 480 kunder vil give 10 kr, 400 kunder vil give 20 kr, 200 kunder vil give 30 kr og 100 kunder vil give 40 kr.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger for hver af de tre måder.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at besvare spørgsmålet.
4. Opstil ud fra alternativ A en kvadratisk model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.
5. Opstil ud fra alternativ B en lineær model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.

6. Opstil ud fra alternativ C en kubisk model for efterspørgslen og besvar spørgsmålet både algebraisk og geometrisk.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
8. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

7. Projekt Kursudvikling

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at forudsige to fremtidige værdier for en kurs på baggrund af 3 datasæt: Når kursen efter 2, 5 og 7 uger er hhv. 40, 67 og 55, hvad vil den da være efter 10 uger, hvornår vil den være 60, og hvornår vil den toppe og bunde?
Senere ønsker vi at forudsige de to fremtidige værdier for en kurs på baggrund af 4 datasæt: Når kursen efter 2, 5, 7 og 9 uger er hhv. 40, 67, 55 og 60, hvad vil den da være efter 10 uger, hvornår vil den være 63, og hvornår vil den toppe og bunde?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier.
4. Opstil en kvadratisk model for kursen og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
5. Opstil en kubisk model for kubisk og brug den til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
6. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
7. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

8. Projekt Lineær Programmering

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme det varemix, som giver størst overskud i en markedsbod, som sælger øl og vand. Der kan investeres op til 1200 kr. i max 10 kasser øl og max 15 kasser vand. I åbningstiden kan sælges max 21 kasser. Indkøbsprisen og salgsprisen er hhv. 25 kr. og 80 kr. pr. kasse vand og 100 kr. og 120 kr. pr. kasse øl.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier.
4. Beskriv begrænsningen i varemængden algebraisk og geometrisk.
5. Beskriv begrænsningen i kapitalen algebraisk og geometrisk.
6. Beskriv begrænsningen i arbejdskraften algebraisk og geometrisk.
7. Opstil en formel for overskuddet D, og illustrer du mulige varemix der svarer til et overskud på hhv. 0 kr. og 600 kr.
8. Find det hjørne i begrænsningsområdet, som giver det største overskud.
9. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
10. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

9. Projekt Kolindsund

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme hvor meget vand, der årligt løber ud i Kolindsund. Pumpemesteren oplyser, at der årligt bortpumpes 50 mio. kubikmeter vand via kanlerne. Dette vand kommer dels fra kilder, dels fra utætte dæmninger i kanalerne. Pumpemesteren oplyser, at vandet skal udpumpes 5 gange, før det er væk.
Vi antager, at vi kan stoppe kilderne, og at kanalerne er tomme. Vi ønsker nu at bestemme vandmængden i Kolindsund, som vi sætter til 100. Vi antager, at vi pumper al vandet op i

kanalerne. Vi antager at procentdelen r løber tilbage til Kolindsund, dvs. procentdelen 1-r forsvinder til havet.

1. Vis, at der efter femte bortpumpning løber r^5*100 tilbage til Kolindsund.
2. Vandet betragtes som pumpet væk, når kun 5% løber tilbage. Vis, at dette betyder at r = 54.9%.
3. Vis at ved 2. pumpegang er vandmængden 100*0.549, hvoraf 100*0.549*0.549 = 100*0,549^2 løber tilbage.
4. Vis at den samlede vandmængde ved de første fem pumpegange er 210.7 (2.107 kaldes multiplikator).
5. Vis, at dette betyder, at der fra kilderne er tilført 23.7 kbm. Vand årligt.
6. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
7. Skitser et bevis til en af de brugte formler.
8. Kredsløbet mellem Kolindsund og kanalerne svarer til pengekredsløbet mellem virksomheder og husholdninger, som drænes af fraløb til opsparing og skat, der dog igen giver tilløb i form af investeringer og overførselsindkomster.

10. Projekt Vinkarton

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme hvordan en 3 liters vinkarton skal dimensioneres for at minimere kartonen. Vi antager, at vinkartonen bestående af 5 sider med tilhørende flapper med en højde der er halvdelen af den korteste side.

1. Lav en skitse af den udfoldede vinkarton og beskriv sidelængderne med x, y og z.
2. Vis at den brugte kartonmængde kan beregnes af formlen K = (x+2·z/2)*(3y+2z)
3. Vis at hvis y er det halve af x, er K = 1.5x^2 + $\frac{21}{x}$ + $\frac{72}{x\text{^}4}$; besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk.
4. Besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk, hvis y er lig med x
5. Besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk, hvis y er dobbelt så stor som x.
6. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
7. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

11. Projekt Kørsel

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at bestemme en række egenskaber ved Peters kørsel, hvor farten blev målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de ønskede værdier.
4. Opstil en model med et fjerdegradspolynomium for Peters kørsel.

Besvar følgende spørgsmål både algebraisk og geometrisk

5. Hvornår begyndte og sluttede kørslen?
6. Hvad var farten efter 12sekunder?
7. Hvornår var farten 25m/s?
8. Hvornår blev der accelereret?
9. Hvornår blev der bremset?
10. Hvad var den maksimale fart?
11. Hvor mange meter kørtes der i de forskellige 5sekunders intervaller?
12. Hvad var accelerationen i begyndelsen af disse intervaller?
13. Hvor langt kørtes i alt?
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
15. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

12. Projekt Newton spiller golf

Problem fra virkeligheden
Newton og hans ven bispen står på kanten af taget på Newtons flade hus. Husets kant befinder sig 7.5 meter ude og tagets højde er 3 m. Vi ønsker at bestemme om Newton kan ramme et golf-hul 40 meter ude ved at sende kuglens afsted med en lodret og vandret hastighed på hhv. 10 m/s og 15 m/s.

1. Indlæg et koordinatsystem, så Newtons bold er i punktet (x,y) = (7.5,3), og golfhullet i (40,0).
2. Oplist de begreber, der kan beskrive problemet matematisk, og anfør en præcis definition af begreberne.
3. Vis, at den vandrette med konstant hastighed kan bekrives af formlen x = xo + vo*t, hvor t angiver tiden, og xo og vo angiver stedet og hastigheden til tiden 0, og hvor v = x'.
4. Vis at formlen for den vandrette bevægelse i dette tilfælde kan omformes til t = (x – 7.5)/10,
5. Den lodrette bevægelse har konstant acceleration. Vis at den lodrette bevægelse kan bekrives af formlen y = yo + wo*t + ½*a*t^2, hvor a angiver tyngdeaccelerationen -9.82 m/s^2, og t angiver tiden, og yo og wo angiver stedet og hastigheden til tiden 0, og hvor a = w' og w = y'.
6. Vis at formlen for den lodrette bevægelse i dette tilfælde er y = 3 + 15*t – 4.91*t^2 ,
7. Vis at de to formler kan sammensættes til formlen y = -0.049 x^2 + 2.235x – 11.001
8. Hvor rammer golfkuglen jordoverfladen? Besvar spørgsmål både algebraisk og geometrisk
9. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
10. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

13. Projekt Spilteori

Problem fra virkeligheden
Vi ønsker at rådgive to spillere A og B med strategivalg i et 2x2 NulSum spil, hvor det gælder, at hvad A vinder, taber B og modsat. A vælger mellem strategierne a1 og a2, og modtager udbyttet 5 eller -5 hvis B vælger strategien b1, og 0 og 10 hvis B vælger strategien b2. For at optimere gevinsten vælger begge spillere at blande deres strategier på tilfældig måde, så A vælger a1 med vægten x, og B vælger b1 med vægten y.

1. Opstil spillets udbyttetavle, som viser de beløb, B skal betale til A
2. Oplist de begreber, der kan beskrive problemet matematisk, og anfør en præcis definition af begreberne.
3. Vis, at hvis B vælger b1, vil A's udbytte være U(x,1) = 10x – 5. Hvad skal A da vælge?
4. Vis, at hvis B vælger b2, vil A's udbytte være U(x,0) = 10 – 10x. Hvad skal A da vælge?
5. Find den vægt x, som gør de to U-tal ens. Hvad er U-tallet da?
6. Vis, at hvis A vælger a1, vil A's udbytte være U(1,y) = 5y. Hvad skal B da vælge?
7. Vis, at hvis A vælger a2, vil A's udbytte være U(0,y) = -15*y + 10. Hvad skal B da vælge?
8. Find den vægt y, som gør de to U-tal ens. Hvad er U-tallet da?
9. Hvis B vægter b1 med ½ tilfældigt (hvordan?), hvad er da A's udbytte? Hvad skal A vælge?
10. Hvis A vægter b1 med ¾ tilfældigt (hvordan?), hvad er da A's udbytte? Hvad skal B vælge?
11. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
12. Skitser et bevis til en af de brugte formler.
13. Vis, at hvis B vægter b1 med y, og A vægter a1 med x, så vil A's udbytte være
U(x,y) = -10*x – 15*y + 20*x*y + 10.
14. Byg en geometrisk model med piberensere i en skotøjsæske. Hvorfor hedder fladen en saddelflade?
15. Gentag opgaven, hvor udbytte tallene (5, -5, 0, 10) ændres til (5, 15, 0, 10).

14. Projekt Statistik

Problem fra virkeligheden
Fra et spørgeskema er udtaget to spørgsmål, hvor følgende svar blev givet:

Hvor mange børn har din mor født? 4, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 5, 2, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 2,
Hvor langt har du til skole? 5, 25, 17, 8, 16, 1, 7, 18, 1, 2, 17, 2, 5, 2, 1, 5, 14, 10, 5, 28, 4, 29, 18, 12, 3, 5, 8, 10, 4, 16, 19, 21, 4, 11, 10, 11, 20, 21, 4, 3, 25, 10, 21, 5, 20, 10, 5, 15, 2, 15,
Vi ønsker at sammenfatte de mange tal til 2-3 tal, som beskriver tallenes midte og variation.

1. Spørgsmål 1: Opstil de indsamlede data i en hyppighedstabel.
2. Oplist de begreber, der kan beskrive problemet matematisk, og anfør en præcis definition af begreberne.
3. Beregn frekvenser og opsummerede frekvenser.
4. Find talmaterialets kvartilsæt, og oversæt det til journalist-sprog efter at have tegnet et boksplot.

5. Find talmaterialets middeltal, og oversæt dette til journalist-sprog.
6. Spørgsmål 2: Grupper de indsamlede data og opstil en hyppighedstabel.
7. Oplist de begreber, der kan beskrive problemet matematisk, og anfør en præcis definition af begreberne.
8. Beregn frekvenser og opsummerede frekvenser.
9. Find talmaterialets kvartilsæt, og oversæt det til journalist-sprog efter at have tegnet et boksplot.
10. Find talmaterialets middeltal, og oversæt dette til journalist-sprog.
11. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

15. Projekt Forskelsvurdering

Problem fra virkeligheden
Et spørgeskema har stillet to spørgsmål, et om køn (A: pige og B: dreng), og et om graden af enighed til et udsagn ved at vælge mellem 5 alternativer (meget uenig, uenig, neutral, enig, meget enig). Vi ønsker at vurdere, om de to køn svarer forskelligt. De indkomne svar var:
(A, 4), (B, 2), (A, 2), (A, 2), (B, 2), (A, 1), (A, 2), (B, 4), (A, 2), (B, 2), (A, 2), (B, 2), (A, 3), (A, 1), (B, 1), (A, 4), (A, 3), (B, 2), (B, 4), (A, 5), (A, 3), (A, 2), (B, 2), (A, 2), (B, 2), (A, 3), (B, 3).

1. Spørgsmål 1: Opstil de indsamlede data i en krydstabel med køn vandret og holdning lodret.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Tilføj to kolonner med det totale antal svar i antal og den gennemsnitlige procent for hver af de fem alternativer.
4. Tilføj en kolonne for hvert køn med de forventede antal svar, baseret på gennemsnittet.
5. Tilføj en kolonne for hvert køn til et ki^2-forskelstal beregnet efter formlen:
ki^2 =(observeret - forventet)^2/forventet.
6. Find det samlede ki^2-forskelstal for begge køn tilsammen.
7. Angiv antallet af frihedsgrader, og find den kritiske værdi på et 5% signifikansniveau.
8. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
9. Hvad er konklusionen hvis det samme svarmønster findes blandt 10 gange så mange personer?

16. Projekt Hypotesetest

Problem fra virkeligheden
Ved 4 kast med et symmetrisk tetraeder kan resultatet '1' forekomme 0, 1, 2, 3 eller 4 gange med 31.6% chance for 0 gange. Men er tetraederet symmetrisk, så gevinstchancen for 1er er 25%? Vi udfører 4-serien 40 gange, og sammenligner vore eksperimentelle data med de teoretiske forventninger for at se, om tetraederet er symmetrisk.

1. Opstil et tælletræ som viser de forskellige udfaldsmuligheder.
2. Anfør hvor mange gennemløb der er til de fem forskellige muligheder.
3. Angiv den samlede sandsynlighed for de fem forskellige muligheder, dels som formel dels fundet ved hjælp af et CAS-værktøj.
4. Opret to lister, liste1 med observerede hyppigheder, og liste2 med 40*TIStat.Binompdf(4,0.25).
5. Opret liste3 med forskels-tallene (ki^2-tallene) beregnet som (liste1-list2)^2/list2,
da ki^2 = Σ(To-Te)^2/Te.
6. Beregn summen af tallene i liste3.
7. Importer de to lister til formelregnerens Stats/List-editor.
8. Udfør en ki^2 GOF (Goodness of Fit) test, som viser de enkelte og det samlede ki^2 tal.
12. Kan vi acceptere hypotesen 'sandsynligheden for udfaldet 1 er 25%'?
13. Hvad ville konklusionen være hvis det samme svarmønster med 400 udførelser i stedet for 40.
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

17. Historisk matematik med beviser

1. Find og bevis en række formler fra Antikken, f.eks. fra geometrien. Husk at angive eventuelle antagelser.
2. Find og bevis en række formler fra Renæssancen, f.eks. fra rentesregning. Husk at angive eventuelle antagelser.
3. Find og bevis en række formler fra den moderne tid, f.eks. fra calculus. Husk at angive eventuelle antagelser.

1. Projekt Afstandsbestemmelse

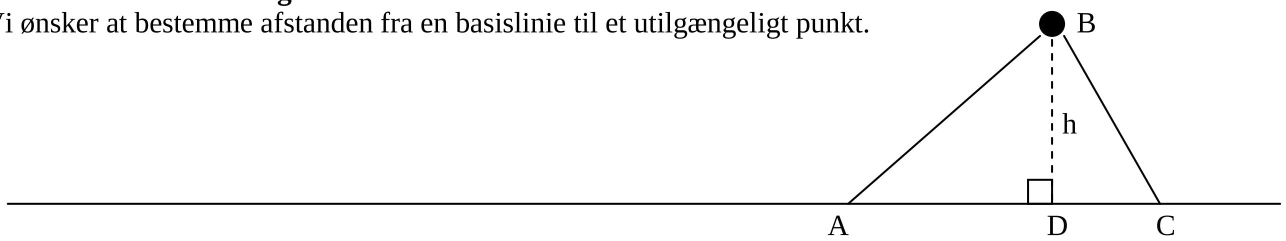
Problemstilling: Hvordan bestemmes afstanden til et utilgængeligt punkt?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vi ønsker at bestemme afstanden fra en basislinie til et utilgængeligt punkt.



2. Opstilling af det matematiske problem

Fra to kendte punkter A og C på en basislinie måles sigtevinklerne til det ukendte punkt B. Dette giver en trekant med tre kendte stykker hvoraf de øvrige stykker kan beregnes, specielt højden h.

3. Løsning af det matematiske problem

Først måles vinklerne CAB og ACB samt afstanden fra A til C.

CAB = 32, ACB = 71, AC = 8

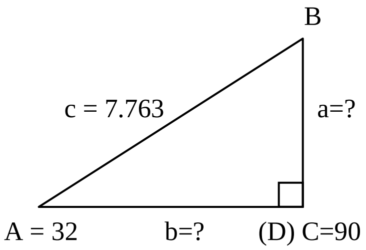
Da vi har at gøre med en VinkelSideVinkel-trekant, kan vi bruge sinusrelationerne til at finde siderne AB (c) og BC (a) samt vinkel B.

B = ?	A+B+C = 180
A=32 C=71	32+B+71 = 180 B = 180 – 32 – 71 B = 77
Test1	32+77+71 = 180 180 = 180 ☺
Test2	Solve(32+B+71=180,B) Giver B = 77

a = ?	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
A=32 b=8 B=77	$\frac{a}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 77}$ $a = \frac{8*\sin 32}{\sin 77} = 4.351$
Test1	$\frac{4.351}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 77}$ 8.211 = 8.210 ☺
Test2	Solve($\frac{a}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 77}$,a) Giver a = 4.351

c = ?	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$
C=71 b=8 B=77	$\frac{c}{\sin 71} = \frac{8}{\sin 77}$ $c = \frac{8*\sin 71}{\sin 77} = 7.763$
Test1	$\frac{7.763}{\sin 71} = \frac{8}{\sin 77}$ 8.210 = 8.210 ☺
Test2	Solve($\frac{c}{\sin 71} = \frac{8}{\sin 77}$,c) Giver c = 7.763

Vi kan nu betragte den retvinklede trekant ADB, hvor vi omdøber D til C for at vi kan bruge formlerne for en retvinklet trekant



a = ?	$\sin A = \frac{a}{c}$
A = 32 c = 7.763	$\sin 32 = \frac{a}{7.763}$ 7.763*sin32 = a 4.114 = a
Test1	$\sin 32 = \frac{4.114}{7.763}$ 0.530 = 0.530
Test2	Solve($\sin 32 = \frac{a}{7.763}$,a) Giver a = 4.114

b = ?	$\cos A = \frac{b}{c}$
A = 32 c = 7.763	$\cos 32 = \frac{b}{7.763}$ 7.763*cos32 = b 6.583 = b
Test1	$\cos 32 = \frac{6.583}{7.763}$ 0.848 = 0.848
Test2	Solve($\cos 32 = \frac{b}{7.763}$,b) Giver b = 6.583

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set at afstanden far basislinien AC til det utilgængelige punkt B er h = 4.11 enheder. Som kontrol kan vi lokalisere punktet D ved afstanden AD = 6.58 og herefter undersøge, om sigtevinklen ADB er 90 grader.

2. Projekt Prognoser

Problemstilling: Hvordan kan man opstille prognoser under antagelse af konstant vækst?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

En formue antages at vokse med konstant vækst. Ud fra to kendte datasæt ønskes opstillet prognoser for en fremtidig værdi, samt for, hvornår en bestemt værdi nås.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over den hidtidige kursudvikling, hvor x er antal dage og y er kursen

x	y = ?
2	10
5	30
8	?
?	60

1. Lineær vækst y = a*x + b	x: +1, y: +a (stigningstallet)
2. Exponentiel vækst y = b*a^x	x: +1, y: + r% (vækstprocenten, a = 1+r)
3. Potens vækst y = b*x^a	x: +1%, y: + a% (elasticiteten)

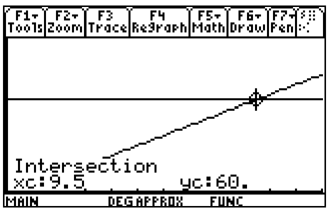
3. Løsning af det matematiske problem

Først findes ligningerne for y ved regression. Vi indtaster datasættene i formelregnerens data/matrix-editor.
Ønskes en lineær model vælges LinReg
Ønskes en eksponentiel model vælges ExpReg
Ønskes en potens model vælges PowerReg

Lineær vækst

y = ?	y = 6.667*x – 3.333
x =8	y1(x) | x=8 giver y=50
Test	Grafisk aflæsning giver y=50 (value)

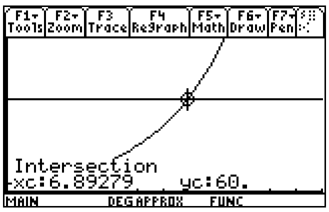
x = ?	y = 6.667*x – 3.333
y = 60	60 = (6.667*x)– 3.333 60 + 3.333 = 6.667*x 63.333/6.667 = x 9.5 = x
Test1	60 = 6.667*9.5– 3.333 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Giver x = 9.5
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 9.5 (intersection)



Eksponentiel vækst

y = ?	y = 4.807 * 1.442^x
x=8	y1(x) | x=8 giver y=90
Test	Grafisk aflæsning giver y = 90 (value)

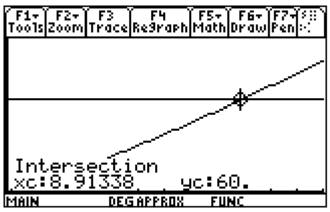
x = ?	y = 4.807 * 1.442^x
y = 60	60 = 4.807 * (1.442^x) 60/4.807 = 1.442^x ln(60/4.807)/ln = x 6.89 = x
Test1	60 = 4.807 * 1.442^6.89 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Giver x = 6.89
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 6.89 (intersection)



Potens vækst

y = ?	y = 4.356*x^1.199
x=8	y1(x) | x=8 giver y=52.7
Test	Grafisk aflæsning giver y =52.7 (value)

x = ?	y = 4.356*x^1.199
= 60	60 = 4.356*(x^1.199) 60/4.356 = x^1.199 (60/4.356)^(1/1.199) = x 8.91 = x
Test1	60 = 4.356*8.91^1.199 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Giver x = 8.91
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 8.91 (intersection)



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set at vi med regressionsligninger kan opstille prognoseligningen til at forudsige fremtidige værdier, samt for, hvornår en bestemt værdi nås.
De tre sæt svar er forskellige, da de bygger på forskellige antagelser.
Lineær vækst forudsætter at stigningstallet er konstant.
Eksponentiel vækst forudsætter at vækstprocenten er konstant.
Potens vækst forudsætter at elasticiteten er konstant.

3. Projekt Lejemål

Problemstilling: Hvordan sammenlignes to forskellige lejemål?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Hos A er lejeprisen 40kr fast plus 3.2 kr/dag.
Hos B er lejeprisen 60kr fast plus 2.5 kr/dag
Hvilket lejemål er billigst?

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi oversætter de to lejemål til ligninger

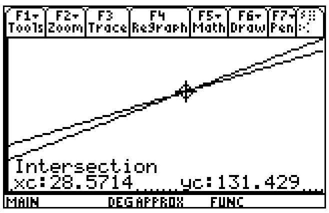
A	B
lejeprisen er 40kr fast plus 3.2 kr/dag.	lejeprisen er 60kr fast plus 2.5 kr/dag
y = 40 + 3.2 * x	y = 60 + 2.5 * x

Det matematiske problem er altså to ligninger med to ubekendte:
Dette problem kan formuleres på to måder, som at ligningssystem hvor vi samler de ubekendte på samme side, eller som en matrix-ligning (matrix: livmoder, støbeform på latin):

Ligningssystem	Matrix-ligning
y - 3.2 * x = 40 y - 2.5 * x = 60	$\begin{pmatrix} 1 & -3.2 \\ 1 & -2.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$

3. Løsning af det matematiske problem

Løsning af ligningssystemet

x = ? y = ?	y - 3.2 * x = 40 y - 2.5 * x = 60
	Solve(y-3.2*x=40 and y-2.5*x=60,{x,y}) Giver x = 28.57, y = 131.4
Test1	131.4 – 3.2*28.57 = 40 40 = 40 ☺ 131.4 – 2.5*28.57 = 60 60 = 40 ☺
Test 2	Grafisk aflæsning giver y1(x) = 40 + 3.2 * x y2(x) = 60 + 2.5 * x Skæringspunkt (x,y) = (28.57,131.4) 

Løsning af Matrix-ligning

x = ? y = ?	Mv2*V = Mh2
$Mv2=\begin{pmatrix} 1 & -3.2 \\ 1 & -2.5 \end{pmatrix}$ $Mh2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	V = Mv2^-1 * Mh2 $V = \begin{pmatrix} 1 & -3.2 \\ 1 & -2.5 \end{pmatrix}$ ^-1 * $\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 28.57 \\ 131.4 \end{pmatrix}$
Test1	131.4 – 3.2*28.57 = 40 40 = 40 ☺ 131.4 – 2.5*28.57 = 60 60 = 40 ☺
Test 2	$\begin{pmatrix} 1 & -3.2 \\ 1 & -2.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 28.57 \\ 131.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ ☺

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Af den grafiske aflæsning ses, at

A er billigere end B efter 28 dage, og at

B er billigere end A til og med 28 dage

4. Projekt Opsparing og Pension

Problemstilling: Hvor meget pension kan en opsparing give?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden
Ved en opsparing indskydes et fast opsparingsbeløb hver måned på en bankkonto.
Når opsparingen afsluttes, kan opsparingen bruges til at udbetale et fast pensionsbeløb hver måned fra bankkontoen.
Hvad er forholdet mellem det månedlige opsparingsbeløb og pensionsbeløb?

2. Opstilling af det matematiske problem
Ved opsparing gælder to formler, den første gælder for ét enkelt indskud, den anden for mange månedlige indskud:
1) K = Ko(1+R), 1+R = (1+r)^n, K: slutkapital, Ko: begyndelseskapital, r: mdl. rente, R: samlet rente, n antal måneder.
2) K/a = R/r, K: slutkapital, a mdl. indskud, r: mdl. rente, R: samlet rente. #
Vi opsparer 1000 kr./måned i 30 år. Hvilken månedlig pension kan der så udbetales i 10 år? Renten er 0.4% pr. md.

3. Løsning af det matematiske problem
Vi finder først den samlede årlige rente R: 1+R = (1+r)^n = (1+0.004)^12, dvs. R = 1.049 –1 = 0.049 = 4.9% per år.
Så findes den samlede 30årige rente R: 1+R = (1+r)^n = (1+0.004)^(30*12) = 4.209. Dvs. R = 4.209-1 = 3.209 = 321%.
Den rene rente er 30*12*0.4% = 144%. Dvs. rentes renten er 321% - 144% = 177%.
Med a = 1000, r = 0.4% bliver opsparingen efter x indskud K = a*R/r = 1000*(1.004^x –1) / 0.004.
Vi aflæser opsparingen efter 10, 20 og 30 år:

Måneder	120	240	360
Opsparing	153632	401675	802147

Efter 30 år er eget bidraget 1000*360 = 360000. Rentebidraget er 802147 –360000 = 442147.
Vi ser at opsparingen er kr. 500000 efter 275 indbetalinger.

x = ? $\frac{1000*(1.004^x - 1)}{0.004} = 500000$

$1.004^x - 1 = \frac{500000*0.004}{1000}$

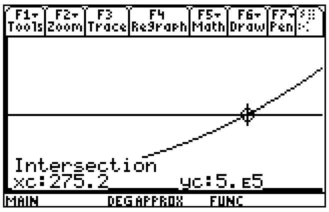
$1.004^x = 2+1$

$x = \frac{\ln(3)}{\ln(1.004)} = 275.2$

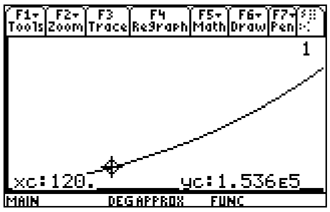
Test1 $\frac{1000*(1.004^{275.2} - 1)}{0.004} = 500000$

499994 = 500000

Test 2



x = 120, K = ?



Skal opsparingen udbetales som pension over 10 år, benyttes to konti.
På konto 1 er opsparingen til forrentning, og vokser da på 10 år til K = Ko(1+R) = 802147*(1+0.004)^120 = 1295089.
På konto 2 laves en 'negativ opsparing', hvor der månedlig udbetales et fast beløb a, og hvor de to konti skal balancere efter 10 år: K = a*R/r = Ko(1+R), dvs. a*(1.004^120 –1) / 0.004 = 1295089. Løses denne ligning fås a = 8430.
Forholdet mellem udbetaling og indbetaling er da (10*12*8430)/(30*12*1000) = 2.8.
Gentages beregningerne med en månedlig rente på 0.3% og 0.5% fås:

Mdl. rente	Årlig rente	Opsparet beløb	Månedlig pension	Forhold mellem ud- og indbetaling
0.3%	3.7%	646640	6425	(10*12*6425)/(30*12*1000) = 2.1
0.4%	4.9%	802147	8430	(10*12*8430)/(30*12*1000) = 2.8
0.5%	6.2%	1004515	11152	(10*12*11152)/(30*12*1000) = 3.7

4. Løsning af problemet fra virkeligheden
Ved en opsparing indskydes et fast opsparingsbeløb hver måned på en bankkonto. Kontoen vokser, fordi der hver måned tilføres tre beløb: et nyt indskud, rente af det samlede indskud, samt rente af de tilskrevne renter (rentes rente).
Når opsparingen afsluttes, fortsætter den med at vokse, dog bliver det månedlige indskud erstattet af en månedlig udbetaling, pension. Med et månedligt indskud på kr. 1000 i 30 år kan det hvert måned udbetales kr. 8430 i 10 år.
Med en månedlig rente på hhv. 0.3%, 0.4% og 0.5% udbetales hhv. 2.1, 2.8 og 3.7 gange mere end der indbetales. Dog skal man huske, at prisstigninger i den 40årige periode, inflation, kan nedsætte denne faktor.

Opsparing med konstant indskud på a kr og rente r%: På konto 1 indsættes a/r, den årlige rente a/r*r = a overføres til konto 2 som fast årligt indskud a sammen med årlig rente til begge konti.
Konto 2 vil da indeholde dels en opsparing K, dels den samlede rente R af a/r, altså a/r*R. Dvs. K = a/r*R eller K/a = R/r.

5. Projekt Prisdannelse, Udbud og Efterspørgsel

Problemstilling: Hvordan bestemmer udbud og efterspørgsel markedsprisen?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

For en given vare kendes varens udbudskurve og efterspørgselskurve. Dvs. vi kender sammenhængen mellem varens pris, og den udbudte og efterspurgte varemængde. Hvis udbud er større end efterspørgsel må prisen sænkes for at øge efterspørgselen og sænke udbuddet. Hvis udbud er mindre end efterspørgsel må prisen øges for at sænke efterspørgselen og øge udbuddet.
Ligevægtsprisen opstår derfor hvor udbud er lig med efterspørgsel.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over efterspørgsel og udbud. Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være 0<x<10. Ved hjælp af regression findes de to ligninger, der derefter sættes lig med hinanden for at finde skæringspunktet, hvor de er ens.

Lineære kurver

Pris x	Udbud u	Efterspørgsel e
2	40	80
4	60	50

Krumme kurver

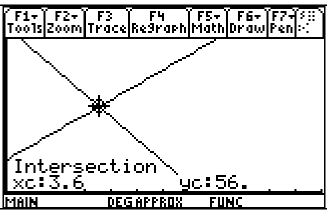
Pris x	Udbud u	Efterspørgsel e
2	40	80
4	60	50
6	75	30

3. Løsning af det matematiske problem

Først findes ligningerne ved regression. Vi indtaster datasættene i formelregnerens data/matrix-editor.
Kendes 2 tabel-værdier opstilles en 1.grads-model , 1. grads-polynomium uden krumning, med LinReg.
Kendes 3 tabel-værdier opstilles en 2.grads-model , 2. grads-polynomium med krumning, med QuadReg.
Herefter findes skæringspunkterne ved at løse to ligninger med to ubekendte.

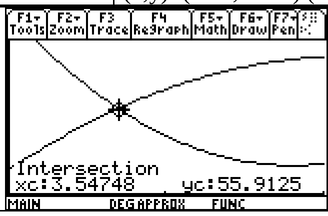
1. grads-polynomium

x = ?	Udbud = efterspørgsel
u = 10x+20 e = -15x+110	10x+20 = -15x+110 10x + 15x = 110-20 25x = 90 x = 90/25 = 3.6
Test1	y1(x) | x=3.6 giver y=56 y (x) | x=3.6 giver y=56
Test2	Solve(y1(x)=y2(x),x) giver x=3.6
Test3	Grafisk aflæsning giver (x,y)=(3.6,56) (intersection)



2. grads-polynomium

x = ?	Udbud = efterspørgsel
u = -0.625x^2+13.75x+15 e = 1.25x^2-22.5x+120	-0.625x^2+13.75x+15 = 1.25x^2-22.5x+120 -1.875x^2+36.25x-105 = 0
Faktorisering Nulregel	-1.875*(x-15.79)*(x-3.55) = 0 x = 15.79 og x = 3.55 15.79 ligger uden for definitionsmæ.
Test1	y1(x) | x=3.55 giver y=55.91 y2(x) | x=3.55 giver y=55.91
Test2	Solve(y1(x)=y2(x),x) giver x=3.55
Test3	Grafisk aflæsning giver (x,y)=(3.55,55.91) (intersection)



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set, at i det tilfælde hvor udbuds- og efterspørgselskurverne er lineære, resulterer ligevægtsprisen 3.6 kr. i at udbud og efterspørgsel er lige store, i dette tilfælde 56 enheder.
Vi har set, at i det tilfælde at udbuds- og efterspørgselskurverne er krumme, resulterer ligevægtsprisen 3.55 kr. i at udbud og efterspørgsel er lige store, i dette tilfælde 55.9 enheder.
Løsningen forudsætter, at de opstillede tabeller holder. Ændres de, vil regressionsligningerne også ændres og dermed løsningen.

6. Projekt Indsamling, Lafferkurve

Problemstilling: Hvilken billetpris vil give det største indsamlingsbeløb?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vi ønsker at indsamle et beløb til Operation Dagsværk blandt skolens 500 elever ved at sælge billetter til en fast pris. Hvilken af følgende tre indsamlingsmodeller giver det største bidrag?

A. Vi undlader markedsføring.
B. Vi foretager markedsføring.
C. Vi foretager markedsføring og udskriver et lotteri.

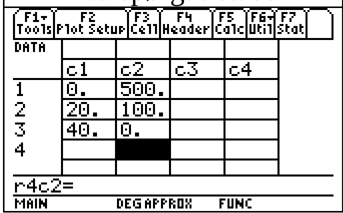
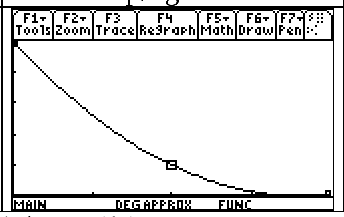
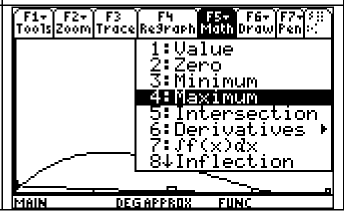
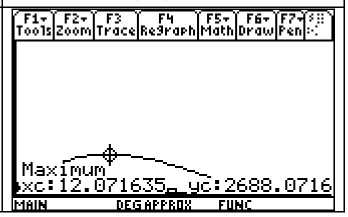
2. Opstilling af det matematiske problem

Efterspørgslen y1(x) vil afhænge af den fastsatte pris x. Det indsamlede beløb vil da være y2(x) = y1(x)*x.

3. Løsning af det matematiske problem

Model A. Vi antager, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgselen falder hurtigt så kun 100 kunder vil give 20 kr.

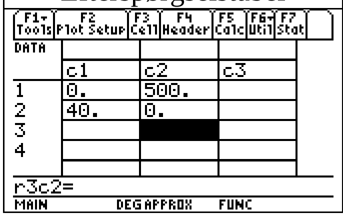
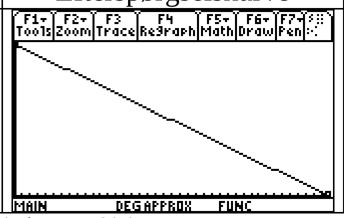
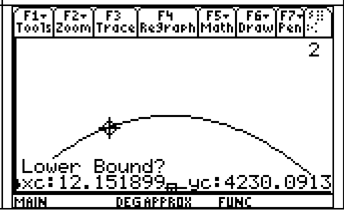
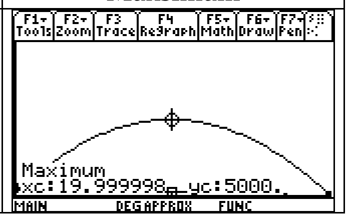
Efterspørgselskurve: 3 datasæt, dvs. 2 grads polynomium. 'QuadReg' giver y1(x) = .375*x^2 – 27.5*x + 500

Efterspørgselstabel	Efterspørgselskurve	Indkomstkurve	Maksimum
			

Forudsigelse: 'solve(d/dx y2(x) = 0, x)' giver x = 12.1

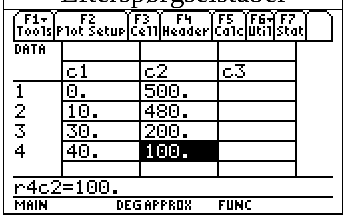
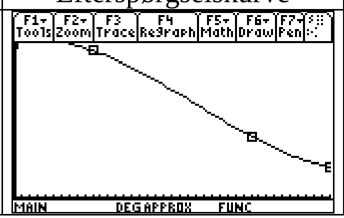
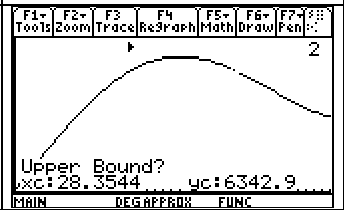
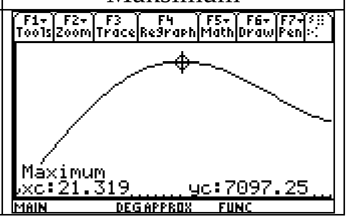
Model B. Vi antager, at en markedsføring vil bevirke, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at ingen vil give over 40 kr, og at efterspørgselen falder jævnt.

Efterspørgselskurve: 2 datasæt, dvs. 1 grads polynomium. 'LinReg' giver y1(x) = -12.5*x + 500

Efterspørgselstabel	Efterspørgselskurve	Indkomstkurve	Maksimum
			

Forudsigelse: 'solve(d/dx y2(x) = 0, x)' giver x = 20.0

Model C. Vi laver en markedsføring af et lotteri med 1 hovedpræmie 500 kr og 3 sidepræmier på 200 kr. Vi antager, at dette vil bevirke, at alle 500 kunder vil købe en billet ved prisen 0 kr, at 480 kunder vil give 10 kr, 400 kunder vil give 20 kr, 200 kunder vil give 30 kr og 100 kunder vil give 40 kr. Efterspørgselskurve: 4 datasæt, dvs. 3 grads polynomium. 'CubicReg' giver y1(x) = 0.013*x^3 – 0.933*x^2 + 6*x +500

Efterspørgselstabel	Efterspørgselskurve	Indkomstkurve	Maksimum
			

Forudsigelse: 'solve(d/dx y2(x) = 0, x)' giver x = 21.3

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Indsamling uden markedsføring vil give en indkomst på 5000 kr ved en billetpris på 12 kr
Markedsføring uden lotteri vil give en indkomst på 5000 kr ved en billetpris på 20 kr.
Markedsføring med lotteri vil give en indkomst på 7580 -1100 = 6480 kr ved en billetpris på 21 kr.

7. Projekt Kursudvikling

Problemstilling: Hvordan kan man fremskrive en kursudvikling?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Kursen på 3 aktier har udviklet sig som vist i tabellerne. Kan vi opstille en prognoseligning for kurserne? Kan vi bruge prognoseligningen til at forudsige fremtidige værdier, og til at forudsige top- og bundpunkter?

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over den hidtidige kursudvikling, hvor x er antal dage og y er kursen

2 data-sæt

x	y = ?
2	40
5	67
10	?
?	90

3 data-sæt

x	y = ?
2	40
5	67
7	55
10	?
?	50

4 datasæt

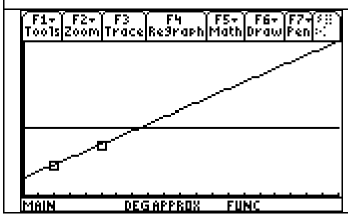
x	y = ?
2	40
5	67
7	55
9	60
10	?
?	63

3. Løsning af det matematiske problem

Først findes ligningen for y ved regression. Vi indtaster datasættene i formelregnerens data/matrix-editor.
Kendes 2 tabel-værdier opstilles en 1.grads-model , 1. grads-polynomium uden krumning, med LinReg
Kendes 3 tabel-værdier opstilles en 2.grads-model , 2. grads-polynomium med krumning, med QuadReg
Kendes 4 tabel-værdier opstilles en 3.grads-model , 3. grads-polynomium med krumning og modkrumning, med CubicReg.

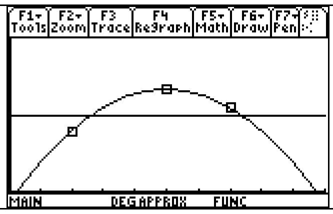
1. grads-polynomium

y = ?	y= 9x+22
x=10	y1(x) | x=10 giver y=112
Test	Grafisk aflæsning giver y=112 (value)
y=90	Solve(90 = y1(x),x) Giver x = 7.56
Test	Grafisk aflæsning med y2(x)=90 Giver x = 7.56 (intersection)



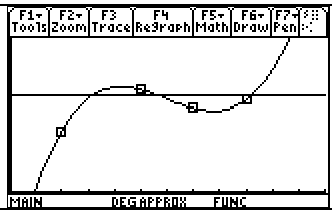
2. grads-polynomium

y = ?	y = -3x^2+30x-8
x = 10	y1(x) | x = 10 gi er y = -8
Test	Grafisk aflæsning giver y = -8 (value)
y = 50	Solve(50 = y1(x),x) Giver x = 2.62, x = 7.38
Test	Grafisk aflæsning med y2(x)=50 giver x = 2.62, x = 7.38 (intersection)
Top & bund	Solve(dy1(x)=0,x) giver x=5 y1(x) | x = 5 giver y = 67
Test	Grafisk aflæsning giver (x,y)=(5,67)



3. grads-polynomium

y = ?	y= 0.732x^3-13.25x^2+73.20x-59.25
x = 10	y1(x) | x = 10 giver y =
Test	Grafisk aflæsning giver y=79.86 (value)
y = 63	Solve(63 = y1(x),x) give x=3.17, x=5.71, x=9. 1
Test	Grafisk aflæsning giver med y2(x) = 63 Skæringsp. (x,y)=(2.62, 7.38) (inters.)
Top & bund	Solve(dy1(x)=0,x) giver x=4.28 & x=7.78 y1(x) | x = 4.28 giver y = 68.71 y1(x) | x = 7.78 giver y = 52.99
Test	Grafisk aflæsning giver Toppunkt: (x,y)=(4.28,68.71) Bundpunkt: (x,y)=(7.78,52.99



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set at vi med regressionsligninger kan opstille prognoseligningen til at forudsige fremtidige værdier, og til at forudsige top- og bundpunkter.
Disse forudsigelser holder ikke nødvendigvis stik, da kurser ikke følger en naturlov, men følger stemningerne på et frit marked.
Ligeledes bygger prognoseligningerne på den forudsætning, at vi kun har de opgivne datasæt.
Kommer der senere andre datasæt til, vil prognoseligningen muligvis ændres.

8. Projekt Lineær Programmering

Problemstilling: Hvordan bestemmes den optimale størrelse af et produktmix?

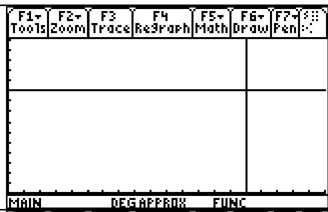
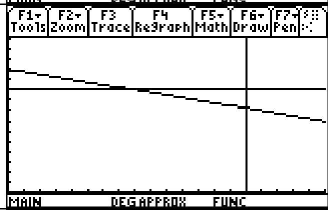
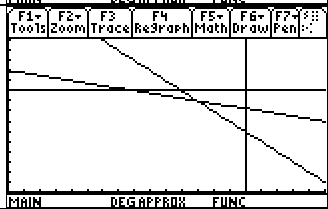
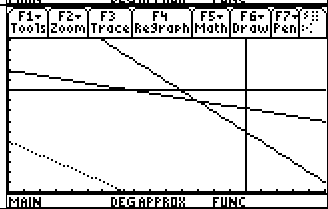
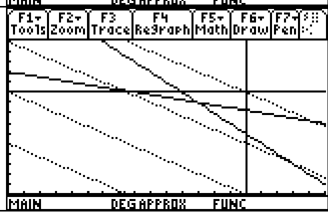
En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Fra en markedsbod sælges øl (max 10 kasser) og vand (max 15 kasser). Indkøbspris: 25 kr. pr. kasse vand og 100 kr. pr. kasse øl. Højst 1200 kr. kan investeres. I åbningstiden kan max sælges 21 kasser. Overskud til dækning af faste omkostninger (leje) og fortjeneste (dækningsbidrag D): Kr. 80/120 pr. kasse vand/øl. Hvad er max. dækningsbidrag?

2. Opstilling af det matematiske problem

Virkelighed	Ligninger	Grafik
Antal kasser vand Antal kasser øl	x y	y ↑ øl → x vand
Begrænsning på råstoffer: Boden kan højst indeholde Højst 15 kasser vand Højst 10 kasser øl	$0 \leq x \leq 15$ $0 \leq y \leq 10$	
Begrænsning på kapital: Indkøbspris: 25 kr. pr. kasse vand 100 kr. pr. kasse øl Højst 1200 kr. kan investeres.	$25*x + 100*y \leq 1200$ $(100*y \leq -25*x + 1200$ $y \leq -\frac{1}{4}*x + 12)$	
Begrænsning på arbejde: I åbningstiden kan sælgeren højst nå at sælge 21 kasser.	$x + y \leq 21$ $(y \leq -x + 21)$	
Overskud til dækning af faste omkostninger (leje) og fortjeneste (dækningsbidrag D): Kr. 80/120 pr. kasse vand/øl.	$D = 80*x + 120*y$ $y = -\frac{2}{3}*x + \frac{D}{120}$ N0: D = 0: $y = -2/3*x$ N600: D = 600: $y = -2/3*x + 5$	
Løsning: Der skal indkøbes 12 kasser vand og 9 kasser øl. Dækningsbidraget bliver da D = 2040 kr.	'Solve($-\frac{1}{4}$ *x+12 = -x+21,x)' giver x = 12 'y =-x + 21|x=12' giver y = 9 D = 80*x + 120*y | x=12 and y = 9' giver D = 2040	

3. Løsning af det matematiske problem

Begrænsninger giver grafisk en polygon (mangekant). Niveaulinierne er parallelle da dækningsbidraget D kun har betydning for skæringen med y-aksen. At øge eller formindske D svare altså til at parallelforskyde niveaulinien hen over polygonen. Den optimale værdi fås da hvor en niveaulinie forlader (tangerer) polygonen, hvilket altid vil ske i et (eller to) hjørner. Man kan derfor forudsige den optimale situation ved at beregne alle hjørnepunkter (n ligninger med n ubekendte), samt D's værdi i disse (simplex-metoden). Denne metode bruges hvos antallet af variable er større end 2.

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi ser, at det maksimale dækningsbidrag bliver 2040 kr ved salg af 12 kasser vand og 9 kasser øl. Endvidere ser vi at de effektive begrænsninger her er åbningstiden og den investerede kapital.

Lineær programmering bruges til at optimere et bestemt tal (at maksimere overskuds-tallet, at minimere omkostnings-tallet osv.) inden for en række begrænsninger på andre tal, f.eks. råstoffer, kapital og arbejde. Råstofferne er her øl og vand, kapitalen er budgettet og salgsboden, og arbejdskraften er sælgeren.

9. Projekt Kolindsund

Problemstilling: Hvordan bestemmes hvor meget vand der løber ud i Kolindsund om året?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vi ønsker at bestemme hvor meget vand, der årligt løber ud i Kolindsund. Pumpemesteren oplyser, at der årligt udpumpes 50 mio. kubikmeter vand. Dette vand kommer dels fra kilder, dels fra utætte dæmninger. Pumpemestern oplyser, at vandet skal udpumpes 5 gange, før det er væk.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi antager, at vi kan stoppe kilderne, og at kanalerne er tomme. Vi ønsker nu at bestemme vandmængden i Kolindsund, som vi sætter til 100. Vi antager, at vi pumper al vandet op i kanalerne. Vi antager at procentdelen r løber tilbage til Kolindsund, dvs. procentdelen 1-r forsvinder til havet. #.

Kolindsund	r*100 ← → 100	Kanalerne	(1-r)*100 →	Havet

3. Løsning af det matematiske problem

Gang 1 løber r*100 tilbage, gang 2 løber r*(r*100) = r^2*100 tilbage, gang 5 løber r^5*100 tilbage.
Vi betragter vandet som pumpet væk, når der kun 5% løber tilbage. Vi kan derfor bestemme r af ligningen

r^5*100 = 5, dvs. r = (5/100)^(1/5) = 0.549 = 54.9%.

Dvs. 45.1% af vandet forsvinder til havet, medens 54.9% svarende til 100*0.549 løber tilbage til Kolindsund.
2. gang der pumpes, er vandmængden da 100*0.549, hvoraf 100*0.549*0.549 = 100*0,549^2 løber tilbage.
I løbet af 5 pumpegange har pumpen da pumpet en samlet vandmængde på

S = 100 + 100*0.549 + 100*0.549^2 + 100*0.549^3 + 100*0.549^4 = 210.7 (2.107 kaldes multiplikator)

Genvej: S = 100*(1 + 0.549 + 0.549^2 + 0.549^3 + 0.549^4) = 100*(1-0.549^5)/(1-0.549). ##

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Hver gang der fra kilderne løber 100% ind i Kolindsund skal der pumpes 210.7% ud. Da disse 210.7 svarer til 50 mio. kbm., vil de oprindelige 100 svare til 100/210.7*50 = 23.7 mio. kbm. Dvs. fra kilderne løber der 23.7 mio. kubikmeter vand ind i Kolindsund hvert år, hvis vore antagelser og pumpemesterens oplysninger er korrekte. Så når der løber 23.7 mio. kbm. ind i Kolindsund, skal der pumpes 210.7% af 23.7 = 50 mio. kbm. ud, da kanalerne er utætte. Dette skyldes at jorden er meget kridtfyldt.

Kredsløbet mellem Kolindsund og kanalerne svarer til pengekredsløbet mellem virksomheder og husholdninger, som drænes af fraløb til opsparing og skat, der dog igen giver tilløb i form af investeringer og overførselsindkomster.

Virksomheder	r*100 ← → 100	Husholdninger	(1-r)*100 →	Stat, Bank

Bevis for formlen for sum af en kvotientrække (opsummeret eksponentiel vækst)

Sum	= 1+a+a^2+a^3+a^4
a*Sum	= a+a^2+a^3+a^4+a^5
Sum-a*Sum	= 1 – a^5
Sum*(1-a)	= 1 – a^65
Sum	**= (1-a^5) / (1-a)**

10. Projekt Vinkarton

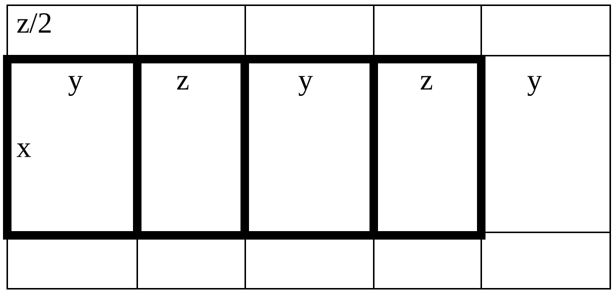
Problemstilling: Hvordan skal en 3 liters vinkarton dimensioneres for at minimere kartonen?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vin kan sælges i flaske eller i karton. Til en 3liters karton skal udskæres et stykke karton:



2. Opstilling af det matematiske problem

Vi indfører betegnelser for de forskellige sider målt i dm, og opstiller ligningen for kartonens volumen V og for den brugte kartonmængde K målt i dm^3 = liter

V = x*y*z = 3 og K = (x+2·z/2)*(3y+2z)

3. Løsning af det matematiske problem

Vi bruger formelregnerens expand til at samle de to formler:

K = expand((x+2·z/2)*(3y+2z)) giver K = 3xy + 2xz + 3yz + 2z^2

I denne formel indsættes nu z = 3/(x*y) så K-tallet kun afhænger af to variable x og y:

$K = 3xy + 2xz + 3yz + 2z\text{^}2 \mid z = 3/(x*y)$ giver $K = 3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2*y\text{^}2}$

Scenarium A. Vi antager at x skal være dobbelt så stor som y, dvs. at y = 0.5*x

Indsættes denne begrænsning fås

$K = 3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2*y\text{^}2} \mid y = 0.5*x$ giver $K = 1.5x\text{^}2 + \frac{21}{x} + \frac{72}{x\text{^}4}$, og $\frac{dK}{dx} = 3x - \frac{21}{x\text{^}2} - \frac{288}{x\text{^}5} = 0$ for x = 2.4

Vi grafer K-formlen i et vindue med DM =]0,5] og VM =]0, 100] og finder minimumspunktet:

x = 2.4 og K = 19.56, dvs. y = 0.5*x = 0.5*2.4 = 1.2, og z = 3/(2.4*1.2) = 1.0

Scenarium B. Vi antager at x skal være lige så stor som y, dvs. at y = x

Indsættes denne begrænsning fås

$K = 3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2*y\text{^}2} \mid y = x$ giver $K = 3x\text{^}2 + \frac{15}{x} + \frac{18}{x\text{^}4}$, og $\frac{dK}{dx} = 6x - \frac{15}{x\text{^}2} - \frac{72}{x\text{^}5} = 0$ for x = 1.7

Vi grafer K-formlen i et vindue med DM =]0,5] og VM =]0, 100] og finder minimumspunktet:

x = 1.7 og K = 19.65, dvs. y = x = 1.7, og z = 3/(1.7*1.7) = 1.0

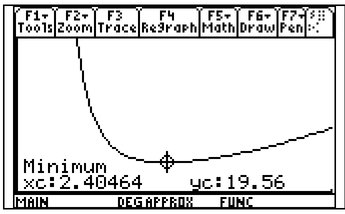
Scenarium C. Vi antager at x skal være halvt så stor som y, dvs. at y = 2*x

Indsættes denne begrænsning fås

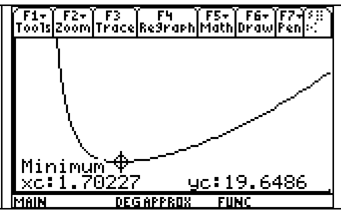
$K = 3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2*y\text{^}2} \mid y = 2x$ giver $K = 6x\text{^}2 + \frac{12}{x} + \frac{4.5}{x\text{^}4}$, og $\frac{dK}{dx} = 12x - \frac{12}{x\text{^}2} - \frac{18}{x\text{^}5} = 0$ for x = 1.2

Vi grafer K-formlen i et vindue med DM = [0,5] og VM = [0, 100] og finder minimumspunktet:

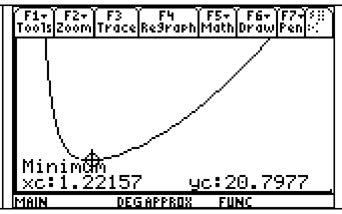
x = 1.2 og K = 20.80, dvs. y = 2x = 2*1.2 = 2.4 , og z = 3/(1.2*2.4) = 1.0



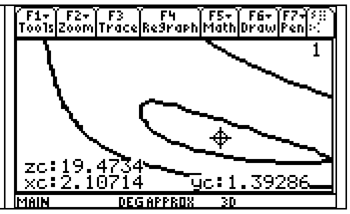
Scenarium A



Scenarium B



Scenarium C



Uden begrænsn., konturlinier

(Konturlinier: Mode 3D, K ind på y-liste. Window x: 0.5-3, y: 0.5-3, z: 0-30, F1 9 Format: Rect, Off, Off, Countour level. F3 Trace)

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi ser, at den minimale kartonmængde er på lidt over 19 dm^3. Ved hjælp af konturlinier eller et Excel-regneark kan bestemmes, at den optimale løsning er x = 2.1 og y = 1.4 og z = 1.0, hvilket giver et K-tal på 19.47 dm^3.

(Bemærk: Grafes formlen $K = 3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2*y\text{^}2}$ fås ikke en kurve, men en flade, se den indlagte Excel-fil på konferencen)

11. Projekt Kørsel

Problemstilling: Hvor langt, hvor længe og hvordan kørte Peter?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Ved kørsel svarer hastigheden 100 km/t til 100*1000/(60*60) = 27.8 m/s. Under Peters kørsel blev hastigheden målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s. Hvornår begyndte og sluttede kørslen? Hvad var farten efter 12sekunder? Hvornår var farten 25m/s? Hvornår blev der accelereret? Hvornår blev der bremset? Hvad var den maksimale fart? Hvor mange meter kørtes der i de forskellige 5sekunders intervaller? Hvad var accelerationen i begyndelsen af disse intervaller. Hvor langt kørtes i alt?

2. Opstilling af det matematiske problem

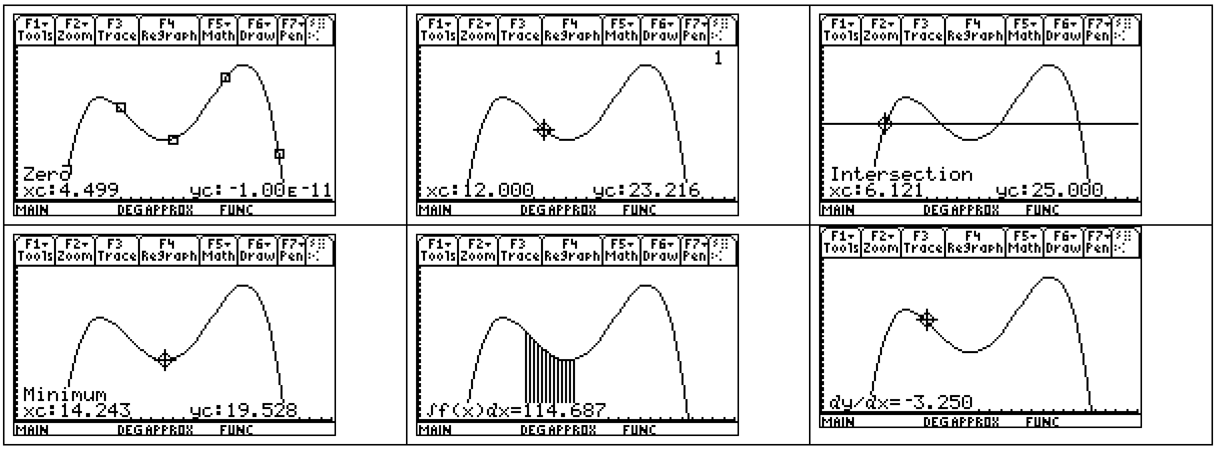
Vi opstiller en tabel over tid x og fart y. Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være 0<x<30.

Tid x sek	Fart y m/s
5	10
10	30
15	20
20	40
25	15

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-89 indlægges x-tal og y-tal i data-matrix eller som listerne L1 og L2. Med 5 talpar vælges kvartisk regression (et 4.grads polynomium med en 3-dobbelt parabel), der giver formlen y = -0.009x^4 + 0.53x^3 - 10.875x^2 + 91.25x - 235, som indlægges som y1(x). Herefter besvares de stillede spørgsmål ved brug af ligningsskemaer og grafisk aflæsning.

Start- og sluttidspunkt findes med ''F5 Zero'. Y-tal bestemmes med 'F5 Value'. X-tal bestemmes med 'F5 Intersection'. Maximum og minimum med F5 Maximum/Minimum'. Acceleration fås som hældning på hastighedskurven med 'F5 dy/dx'. Det samlede meter-tal fås ved at løse differentialligningen m' = y1, m(4.5) = 0, dvs. m = ∫y1dx. Dette giver m-ligningen -.002x^5 + .133x^4 – 3.625x^3 + 45. 625x^2 – 235x + 412.91.



y = ?	y = y1(x)
x=12	y = y1(12) = 3.667
Test	Grafisk aflæsning med F5 Value og x = 12 giver y = 23.216

x = ?	y = y1(x)
y = 25	F2 solve (y1(x) = 25,x) giver x = 6.12, 11.44, 16.86 og 24.47
Test1	y1(3) = 6, y1(8)= 6
Test2	Grafisk aflæsning med y2 = 25 giver x = 6.12, 11.44, 16.86 og 24.47 (F5 intersection)

ymax=?	y = y1(x)
	Calc maximum Giver y = 7.042 ved x = 5.5
Test	dy/dx = 0 ved x = 5.5

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Kørslen begyndte efter 4.50 sek og sluttede efter 25.62 sek. Efter 12sekunder var farten 23.2 m/s. Farten var 25m/s efter 6.12 sek, 11.44 sek, 16.86 sek og 24.47 sek. Der blev accelereret i tids-intervallerne (4.50; 8.19) og (14.24; 21.74). Der blev bremset i tids-intervallerne (8.19;14.24) og (21.74;25.62). Max-fart var 44.28 m/s = 159 km/t. efter 21.7 sek. I de forskellige tids-intervaller (5;10), (10;15), (15;20) og (20;25) kørtes der hhv. 142.8 m, 114.7 m, 142.8 m og 189.7 m. Accelerationen i enderne af disse intervaller var hhv. 17.75, -3.25, 1.25, 4.25, -21.25 m/s^2. I alt kørtes der 597.4 m.

12. Projekt Newton spiller golf

Problemstilling: Hvordan kan Newton ramme et golf-hul 40 meter ude?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Newton og hans ven bispen står på kanten af taget på Newtons flade hus og diskuterer om Newton kan ramme et golf-hul 40 meter ude. Husets kant befinder sig 7.5 meter ude og tagets højde er 3 m.

2. Opstilling af det matematiske problem

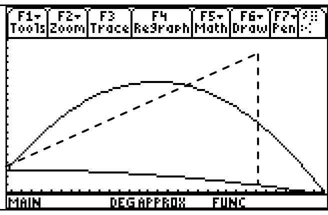
Vi indlægger et koordinatsystem, så Newtons golfbold befinder sig i punktet (x,y) = (7.5,3), og golfhullet i punktet (40,0). Hvilken lodret og vandret hastighed skal Newton give bolden for at der bliver 'hole-in-one'.

3. Løsning af det matematiske problem

Bispen: Golfbolden adlyder Herrens vilje. Først vil den bevæge sig i en lige linie, indtil Herren bestemmer at den skal falde, og da falder den lige ned. Så hvis du vil have, at den skal begynde sit fald lige over golfhullet, må du tro, gå i kirke og bede Herren om dette. Uden Herrens nåde vil du aldrig ramme.
Newton: Du skal vide, gå i skole, og lære differential- og integralregning, som siger 10 vandret og 15 lodret.

Vandret bevægelse	$a = v' = 0$	Acceleration = hastighed differentieret Ingen vandret kraft = ingen vand. acceleration
	$v = x' = k = 10$ da vandret $v = 10$ til $t = 0$	Hastighed = sted differentieret
	$x = 10t + k = 10t + 7.5$	Da $x = 7.5$ til $t = 0$
	Solve ($x = 10t + 7.5$,t)	giver $t = 0.1x – 0.75$
Lodret bevægelse	$a = v' = -9.8$	Lodret acc. = tyngdeacceleration
	$v = y' = -9.8t + k = -9.8t + 15$ da lodret $v = 15$ til $t = 0$	Hastighed = sted differentieret
	y = -4.9t^2+15t + k = -4.9t^2+15t + 3	Da $y = 3$ til $t = 0$
Banekurve:	y = -4.9t^2+15t + 3 ∣ t = 0.1x – 0.75	giver y = -0.049 x^2 + 2.235x – 11.001
Test	y = -0.049 x^2 + 2.235x – 11.001 ∣ x = 40	giver y = 0

Newton: Så ved at gå I skole og oplyse mig kan jeg se, at hvis jeg tildeler bolden en lodret hastighed på 15m/s og en vandret hastighed på 10m/s, så vil ikke Herrens vilje, men tyngdens vilje, dvs. tyngdekraften sørge for at jeg får 'hole-in-one'. Se bare her.
Bispen: Når du skyder bolden opad, påkalder du Herrens opmærksomhed. Og som du ser, er Herren dig nådig.
Newton: Jeg kan da også skyde bolden ligeud med en vandret begyndelseshastighed på c m/s

Vandret bevægelse	$a = v' = 0$ $v = x' = c$ da vandret $v = c$ til $t = 0$ $x = ct + k = ct + 7.5$ da $x = 7.5$ til $t = 0$ Solve ($x = ct + 7.5$,t) giver $t = (x – 7.5)/c$	
Lodret bevægelse	$a = v' = -9.8$	Lodret acc. = tyngdeacceleration
	$v = y' = -9.8t + k = -9.8t$ da lodret $v = 0$ til $t = 0$	Hastighed = sted differentieret
	y = -4.9t^2+ k = -4.9t^2 + 3	Da $y = 3$ til $t = 0$
Banekurve:	y = -4.9t^2 + 3 ∣ t = (x – 7.5)/c	giver y = -4.9/c^2*(x-7.5)^2 + 3
Finde c	Solve(0 = -4.9/c^2*(40-7.5)^2 + 3,c)	giver $c = 41.54$
Banekurve:	y = -4.9t^2 + 3 ∣ t = (x – 7.5)/41.54	giver y = -0.003 x^2 + 0.043x + 2.840
Test	y = -0.003 x^2 + 0.043x + 2.840 ∣ x = 40	giver y = 0

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Kirken sagde, at månen bevæger sig mellem stjernerne og adlyder en metafysisk uforudsigelig vilje. Newton bestred dette: Månen bevæger sig ikke mellem stjernerne, den falder mod jorden ligesom æblet, adlydende en fysisk vilje, tyngdekraften, der er forudsigelig, fordi den kan sættes på formel, hvorefter banekurven kan beregnes ved at finde stamfunktioner. Bispen blev så chokeret, at han forlod sin stilling og gav sig til at oplyse i stedet for at prædike. Både han og Newton var således med til at lægge grunden til naturvidenskaben, der muliggjorde opbygning af et industri-baseret velfærdssamfund; og til oplysningstiden, der installerede to demokratier, det amerikanske og det franske.

13. Projekt Spilteori

Problemstilling: Hvilken strategi skal man vælge for at maksimere sit udbytte?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

To spillere A og B skal vælge mellem forskellige strategier. Udbyttetavlen viser de beløb, B skal betale til A. Spillet kaldes et NulSum spil, da A's + B's udbytte = 0: Hvad A vinder, taber B og modsat.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi betragter to forskellige spil:

I

		B b1	b2
A	a1	5	0
	a2	15	10

II

		y B b1	*1-y* b2
A *x*	a1	5	0
1-x	a2	-5	10

3. Løsning af det matematiske problem

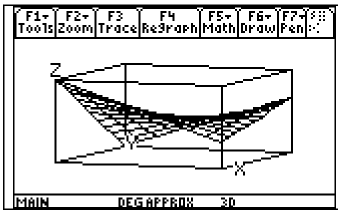
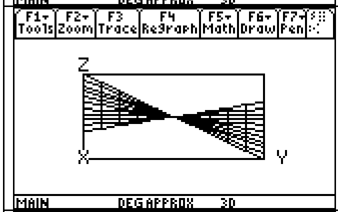
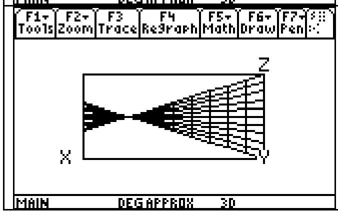
I: Vi lytter til, hvordan A og B analyserer spillet:
A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte 10. For at maksimere mine minimums-tal bør jeg vælge a2.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 15, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimums-tal bør jeg vælge b2.

A: Var jeg B ville jeg vælge b2, derfor bør jeg vælge a2.
B: Var jeg A ville jeg vælge a2, derfor bør jeg vælge b2.

Strategiparret (a2,b2) kaldes spillets **ligevægtspunkt**. Ingen af spillerne har interesse i at fravælge ligevægtsstrategien.

A risikerer at få udbyttet 0 i stedet for 10.
B risikerer at få udgiften 15 i stedet for 10.

A fastholder sin **minimaks**-strategi, og
B fastholder sin **maksimin**-strategi.

	Hold piletasten nede 1 sekund for at se fladen dreje.
	'Solve(-15*y+10 =5*y, y)' giver y= 0.5
	'Solve(-10*x+10 = 10*x-5, x)' giver x= 0.75

II: Vi lytter til, hvordan A og B analyserer spillet:
A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte –5. For at maksimere mine minimums-tal bør jeg vælge a1.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 5, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimums-tal bør jeg vælge b1.

A: Var jeg B ville jeg vælge b1, derfor bør jeg vælge a1.
B: Var jeg A ville jeg vælge a1, derfor bør jeg vælge b2.
A: Og dog, det har B regnet ud og vælger b2. Derfor vælger jeg a2.
B: Og dog, for det har A regnet ud og vælger a2. Derfor vælger jeg b1.Osv. osv. osv.

Dette spil har intet ligevægtspunkt.

For at optimere sit udbytte må B ikke kunne forudsige A's valg og omvendt. Spillerne bør derfor vælge en tilfældigt blandt strategi, A i blandingsforholdet x til 1-x, og B i blandingsforholdet y til 1-y. Herved bliver udbyttet:

U = 5*x*y + 0*x*(1-y) – 5*(1-x)*y + 10*(1-x)*(1-y)

U = -10*x – 15*y + 20*x*y + 10

Indtegnes U på formelregneren som boks, ses at U-fladen har et saddelpunkt, hvor det går ned til begge sider den ene vej, og op til begge sider den anden vej. Saddelpunktets x-koordinat findes som skæring mellem de to x-linier der fremkommer ved at sætte hhv. y=0 og y=1:

y = 0 : U = -10*x + 10, og y = 1: U = 10*x - 5.

Saddelpunktets y-koordinat findes som skæring mellem de to y-linier der fremkommer ved at sætte hhv. x=0 og x=1:

x = 0 : U = -15*y + 10, og x = 1: U = 5*y.

Dvs. løsningen er x = .75, y = .5, U = 2.5. A bør vælge a2 når A trækker klør, ellers a1. B bør vælge b2 når B trækker sort, ellers b1.B vil i gns. have en udgift på 2.5 per spil. Test forudsigelsen ved at spille spillet 20 gange.

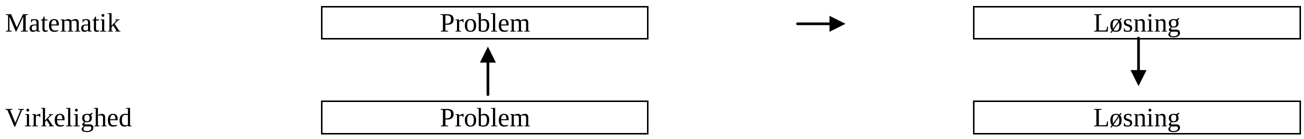
4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi ser, at i et 2personers NulSum-spil findes spillets ligevægtspunkt altid i et saddelpunkt, hvor det går opad til den ene side og nedad til den anden. Ligger saddelpunktet i et hjørne, er dette løsningen til modelproblemet. Ligger saddelpunktet inde på fladen, må strategierne blandes tilfældigt, men i et bestemt forhold .

14. Projekt Statistik

Problemstilling: Hvordan kan vi kort beskrive mange forskellige tal fra et spørgeskema?

En matematisk model:



1. Problemet fra virkeligheden

Tal fra besvarelse af et spørgeskema vil variere uforudsigeligt og kan derfor ikke beskrives med en formel. Hvordan kan vi give en samlet kort beskrivelse af mange forskellige talværdier?

2. Opstilling af det matematiske problem

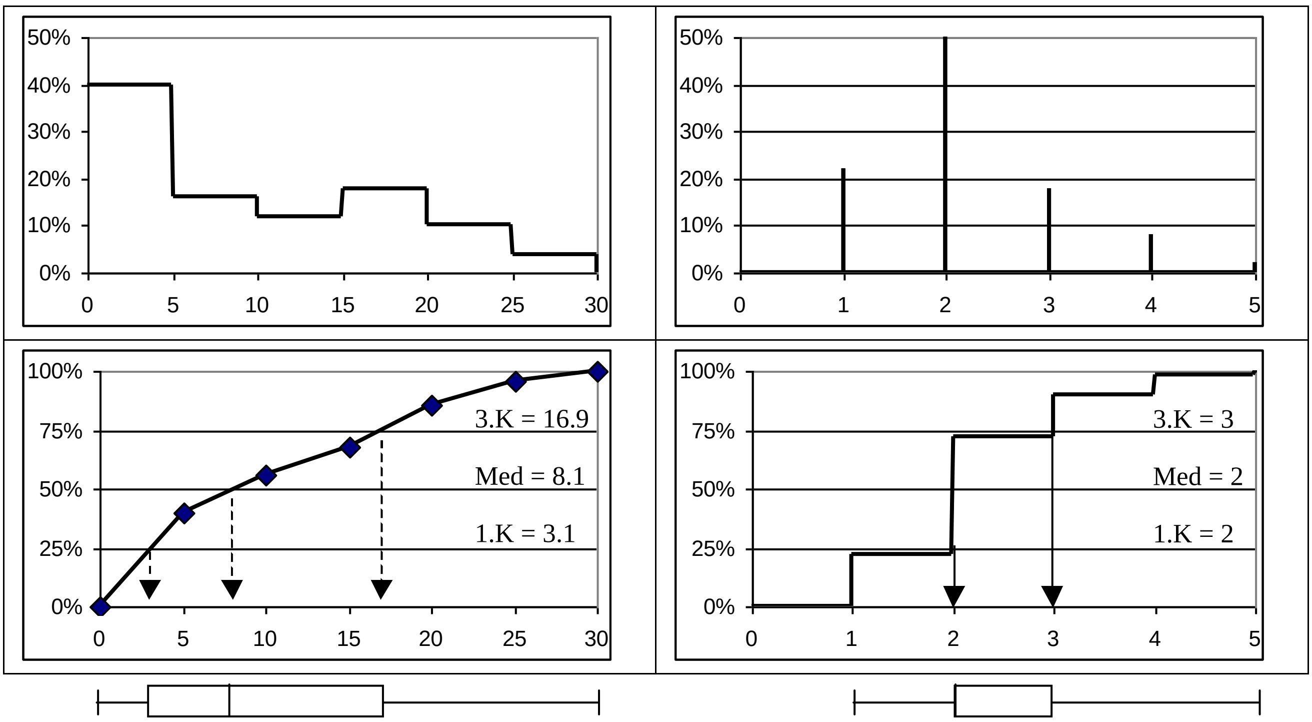
I et spørgeskema indgik disse 2 spørgsmål: Hvor langt har du til skole? Hvor mange børn har din mor født? Svarene kan ikke forud-siges, men kan bagud-siges ved at blive opstillet i en tabel indeholdende observationer og hyppigheder. Afstands-tallene grupperes, medens børneantallet ikke grupperes. Et tal medtages første gang, det nævnes.

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.	Middeltal, Gns.
00-05	20	20/50 = 0.40	0.40	2.5*0.40 = 1.00
05-10	8	0.16	0.56	7.5*0.16 = 1.20
10-15	6	0.12	0.68	1.50
15-20	9	0.18	0.86	3.15
20-25	5	0.10	0.96	2.25
25-30	2	0.04	1.00	1.00
	50	1.00		M = 10.2

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.	Middeltal, Gns.
1	11	11/50 = 0.22	0.22	1*0.22 = 0.22
2	25	0.50	0.72	2*0.50 = 1.00
3	9	0.18	0.90	0.54
4	4	0.08	0.98	0.32
5	1	0.02	1.00	0.10
	50	1.00		M = 2.2

3. Løsning af det matematiske problem

Frekvensen angiver de enkelte hyppigheder i procent af alle svar. F.eks. lå 10% af alle svar i området 20-25, dvs. 10% af de svarende har fra 20 km til og med 25 km til skole. Frekvensen illustreres grafisk med et histogram ved grupperede og et pindediagram ved ikke-grupperede observationer.
Den kumulerede frekvens opsummerer frekvenserne. F.eks. har 86% af de svarende 20 km til skole eller derunder. Den kumulerede frekvens illustreres med en sumkurve. På sumkurven aflæses 1. kvartil, 2. kvartil (medianen) og 3. kvartil ved hhv. 25%, 50% og 75%. Et boks-plot viser mindste og største observation samt de tre kvartiler.
Middeltallet eller gennemsnittet angiver hvor langt de svarende havde til skole, hvis de alle havde lige langt. Ved grupperede observationer benyttes intervallernes midter-tal ved beregning af middeltal.
Tallene kan også findes ved at indtaste observationer og hyppigheder som lister i formelregneren, og derefter benytte Stat Calc 1-Var Stats L1, L2. Igen bruges midter-tal ved grupperede observationer.



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Uforudsigelige tal kan ikke forud-siges af en formel, men kan bagud-siges af en tabel over observationer og hyppigheder. Ud fra tabellen kan beregnes tallenes middeltal. Tallenes frekvenser kan illustreres med histogram eller et pindediagram. Ud fra de opsummerede frekvenser aflæses tallenes tre kvartiler, der sammen med yderværdierne beskrives i et boks-plot.

15. Projekt Forskelsvurdering

Problemstilling: Hvornår er to gruppers adfærd forskellige?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden
To grupper A og B har svaret på et spørgsmål, hvor de skal tilkendegive graden af enighed ved at vælge mellem 5 alternativer. Hvordan vurderes, om gruppernes svar er forskellige?

2. Opstilling af det matematiske problem
I en tabel indeholder de første to søjler svarene fra grupperne A og B.

	A	B	Total	Pct	Forventet A	Forventet B	Forsk. A	Forsk. B	Samlet forskel
Alt1	2	1	3	3/27= 0.111	0.111*16 =1.8	0.111*11 =1.2	0.028	0.040	0.068
Alt2	7	7	14	0.519	8.3	5.7	0.203	0.295	0.497
Alt3	4	1	5	0.185	3.0	2.0	0.363	0.528	0.891
Alt4	2	2	4	0.148	2.4	1.6	0.058	0.084	0.142
Alt5	1	0	1	0.037	0.6	0.4	0.280	0.407	0.688
Total	**16**	**11**	**27**	**1.000**					**2.286**

3. Løsning af det matematiske problem
Vi tilføjer 5 nye søjler til tabellen. I søjle 3 beregnes for hvert alternativ det totale antal svar, i søjle 4 pct. andelen af svar. I søjlerne 5 og 6 det forventede antal svar hvis de to grupper svarer nøjagtigt ens.

I den sidste kolonne beregnes så for hvert alternativ et forskelstal efter formlen

ki^2 =(observeret - forventet)^2/forventet.

Til sidst beregnes det totale forskelstal, der i dette tilfælde bliver ki^2 = 2.286.

Hvis de to grupper havde svaret nøjagtigt end ville ki^2 = 0. Så der er en forskel på hvordan de to grupper svarer. Spørgsmålet er blot om forskellen er så stor at den er kritisk.

De kritiske grænsetal findes i en ki^2-tabel.

Frihedsgrader	1	2	3	4	5	6	7	8
Kritisk forskel	3.841	5.991	7.815	9.488	11.07	12.592	14.067	15.507

Først må vi dog finde antallet af frihedsgrader. Af den lodrette total på 16 kan variere frit på alle spørgsmål, på nær det sidste, der altid vil kunne beregnes som resten. Tilsvarende vil den vandrette total på 3 kunne variere frit på alle grupper, på nær den sidste, der altid vil kunne beregnes som resten.

Så antallet af frihedsgrader vil kunne beregnes af formlen

frihedsgrader = (rækker – 1)*(kolonner – 1).

I vores tilfælde gælder da frihedsgrader = (5 – 1)*(2 – 1) = 4. Af tabellen ses at den kritiske grænse ved 4 frihedsgrader er 9.488, idet vi ønsker at vort svar skal være 95% korrekt.

4. Løsning af problemet fra virkeligheden
Ved en spørgeskemaundersøgelse svarer to grupper A og B forskelligt. Ved beregning af det totale forskelstal fås tallet ki^2 = 2.286. Da den betragtede undersøgelse består af 5 spørgsmål besvaret af 2 grupper vil antallet af frihedsgrader være 4*1 = 4. I dette tilfælde er det kritiske forskelstal 9.488, hvis vi ønsker at vort svar skal være 95% korrekt.

Da det aktuelle forskelstal er mindre end det kritiske tal kan vi konkludere, at forskellen på de to gruppers svar ikke er signifikant på et 5%-signifikansniveau.

16. Projekt Hypotesetest

Problemstilling: Hvordan kan vi teste hypotesen 'Dette tetraeder er symmetrisk*?

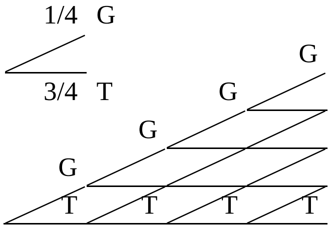
En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Ved 4 kast med et symmetrisk tetraeder kan resultatet '1' forekomme 0, 1, 2, 3 eller 4 gange med 31.6% chance for 0 gange. Men er tetraederet symmetrisk, så gevinstchancen for 1er er ¼? Vi udfører 4-serien 40 gange, og sammenligner vore eksperimentelle data 16, 14, 7, 2, 1 med de teoretiske forventninger for at teste, om tetraederet er symmetrisk.

2. Opstilling af det matematiske problem



Gevinst	Resultat	Gennemløb	Sandsynlighed	TIStat.Binompdf(4,0.25)
4	4 G og 0 T	1	1*(1/4)^4*(3/4)^0	0,004
3	3 G og 1 T	4	4*(1/4)^3*(3/4)^1	0,047
2	2 G og 2 T	6	6*(1/4)^2*(3/4)^2	0,211
1	1 G og 3 T	4	4*(1/4)^1*(3/4)^3	0,422
0	0 G og 4 T	1	1*(1/4)^0*(3/4)^4	0.316

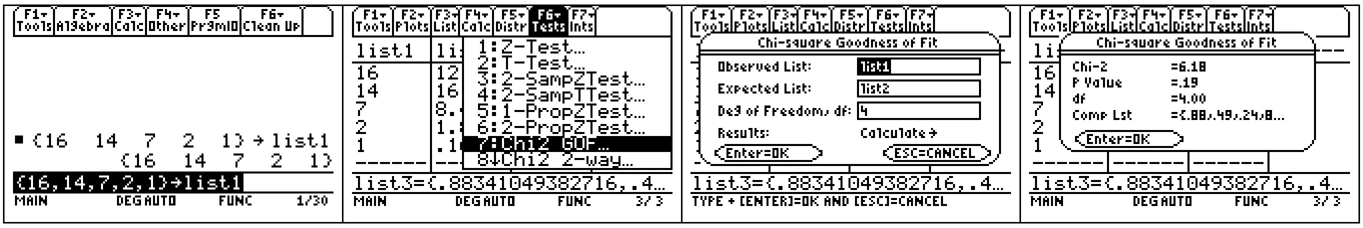
Ved fire gentagelser af et eksperiment med to udfald Gevinst og Tab optræder binomialtal, som nCr(4,2) = 6, samt binomialfordelingen TIStat.Binompdf(4,0.25) med n=4 (4 gentagelser) og p=0.25 (gevinstchance 25%).
Vi ser, at sandsynligheden for at vinde r gange af n er P(n,r) = nCr * p^r * (1-p)^(n-r).
Vi tester nul-hypotesen 'sandsynligheden for udfaldet 1 er 25%.'

3. Løsning af det matematiske problem

Vi opretter to kolonner.
Kolonne 1 indeholder de observerede hyppigheder To.
Kolonne 2 indeholder med de forventede hyppigheder Te = 40*TIStat.Binompdf(4,0.25).
Kolonne 3 indeholder forskels-tallene (ki^2-tallene) beregnet som ki^2 = Σ(To-Te)^2/Te.
Dette giver et samlet ki^2 forskelstal på 6.18.

Gev.	Obs.	Forv.	Afv.	Afv.^2	Ki^2
4	**1**	**0,16**	0,84	0,71	4,56
3	**2**	**1,88**	0,13	0,02	0,01
2	**7**	**8,44**	-1,44	2,07	0,24
1	**14**	**16,88**	-2,88	8,27	0,49
0	**16**	**12,66**	3,34	11,18	0,88
					6,18

Med CAS importeres de to lister til formelregnerens Stats/List-editor. Så udføres en ki^2 GOF (Goodness of Fit) test, som dels viser de enkelte ki^2 tal, samt det samlede ki^2-tal 6.18.



Er de observerede og forventede tal ens, vil ki^2 = 0. Så der er forskel på de to tal. Spørgsmålet er om forskellen er så stor, at den er kritisk. De kritiske forskelstal findes i en ki^2-tabel (5% signifikans).

Først findes antallet af frihedsgrader. Med 5 kategorier kan de 4 variere frit, hvorimod den femte altid vil kunne beregnes som 'resten'. Tilsvarende vandret: med to kategorier kan kategori 1 variere, men ikke den sidste, der altid vil være resten. Så antallet af frihedsgrader vil kunne beregnes af formlen frihedsgrader = (rækker – 1)*(kolonner – 1).
I vores tilfælde gælder da frihedsgrader = (5 – 1)*(2 – 1) = 4. Af tabellen ses, at ved 4 frihedsgrader er den kritiske grænse 9.49, hvis vi ønsker 5% signifikans (fejl-sandsynlighed), og dermed 95% sandsynlighed for et korrekt svar.

Frihedsgrader	1	2	3	4	5	6	7	8
Kritisk forskel	3.841	5.991	7.815	9.488	11.07	12.592	14.067	15.507

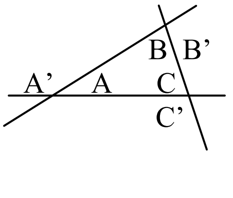
4. Løsning af problemet fra virkeligheden

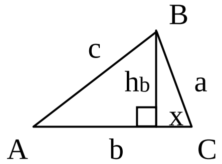
Hypotesen 'dette tetraeder er symmetrisk' testes med 40 udførelser af en 4-serie kast. Vi forventer at få tal, som har binomialfordelingens form, men må konstatere, at vore målinger afviger fra disse. Afvigelsen måles med en ki^2 GOF test på 5% signifikansniveau, og denne viser at forskellen mellem to talsæt er 6.18, dvs. mindre end den kritiske forskelsværdi på 9.49 ved 4 frihedsgrader. Vi kan derfor konkludere, at forskellen ikke er kritisk, så vor nul-hypotese accepteres på et 5%-signifikansniveau, dvs. at der er 95% chance for at undersøgelsens svar er korrekt. Havde den samme fordeling vist sig ved 80 gentagelser, havde ki^2 tallet været det dobbelte, og hypotesen måtte da forkastes.

17. Historisk matematik med beviser

A. Antikken.

Matematikken (læren om mange) opstår samtidig med overgang fra jæger-samler til agerbrugskultur i floddalene (Nilen (Ægypten), Eufrat-Tigris (Arabien), Indus (Indien), den gule flod (Kina). Handel mellem Europas højland og Østens lavlande består af sølv i bytte med især krydderi og silke. Grækernes sølv finansierede den græske kultur. Grækerne talte med bogstaver: alfa, beta, gamma og kan ikke udregne plusstykker. I stedet udvikler grækerne den tal-frie geometri med beviser, påbegyndt med Pythagoras to beviser: $A+B+C = 180$ og $a^2 + b^2 = c^2$. Trigonometri behøver tre ligninger til at beregne de tre ukendte sider, og ekstra ligninger kommer fra arabernes sinus, cosinus og tangens. Romerne talte på fingrene og kan ikke udregne gangestykker. Araberne tæller ved at ti-bundte, så et antal angives som f.eks. 234, dvs. 2 ti-bundter af ti-bundter plus 3 ti-bundter plus 4 ubundtede, eller som et polynomium: $2*B^2 + 3*B + 4$, $B = 10$.





Sinus-relationer: $h_b = c*\sin A = a*\sin C$; dvs. $c/\sin C = a/\sin A$
Tilsvarende fås $h_c = b*\sin A = a*\sin B$; dvs. $b/\sin B = a/\sin A$
Cosinus-relationer: $h_b^2 = c^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2$; $x = a*\cos C$
$c^2 - b^2 - x^2 + 2*b*x = a^2 - x^2$
$c^2 - b^2 + 2*b*a*\cos C = a^2$ *(antagelse: trekanten er spidsvinklet)*
Dvs. $c^2 = a^2 + b^2 – 2*a*b*\cos C$; $c^2 = a^2 + b^2$ hvis $C = 90$.

B. Renæssancen.

Grækernes sølvminer blev tømt på 100 år. Romernes spanske sølvminer blev erobret af vandaler (Andalusien = Vandal-landet, Vandal = Vendel?). Kort efter år 1000 findes sølv i Harzen (dollar = thaler). Sølvet bringes til Norditalien, og med arabiske mellemhandlerne genopstår øst-handlen. Den opsamlede kapital skaber bankvæsen i Italien, som udskifter romertal med arabertal, og udvikler gange, potens, rod og logaritme.

Kapital: $K = Ko*(1 + R) = Ko*(1 + r)^n = Ko*e^{(kn)}$. Dvs. $e^k = 1+r$, eller $k = \ln(1+r)$. Og $R = n*r$ + rentesrente
Samlet rente R: $1+R = (1+r)^n$. Fordobling: $2*Ko = Ko*(1 + r)^x$, dvs. $x = \ln 2/\ln(1+r)$.
Kontinuert rentetilskrivning af 100%: $1+R = (1+1/n)^n = e$, n stor: $(1+1/n)^n \to e = 2.7182818$ for $n \to \infty$.
Opsparing med konstant indskud på a kr og rente r%: På konto 1 indsættes a/r, den årlige rente $a/r*r = a$ overføres til konto 2 som fast årligt indskud a sammen med årlig rente til konto 2. Konto 2 vil da indeholde dels en opsparing A, dels den samlede rente R af a/r, altså $a/r*R$. Dvs. $A = a/r*R$ eller $A/a = R/r$.

C. Den moderne tid.

Englænderne kan sejle og erobre spansk sølv, men skal sejle på åbent hav til Inden for at undgå Portugals befæstning af Afrikas kyst. Breddegrad bestemmes let (nordstjerne og sydkors). Længdegraden bestemmes ved månens position mellem stjernerne, men hvordan bevæger månen sig? Kirken: Mellem stjernerne, følgende den metafysiske Herres uberegnelige vilje, hvorfor vi blot skal tro, bede og gå i kirke. Descartes har opfundet koordinatsystemet, som koordinerer geometri og algebra, så man kan regne på kurver, og grafe ligninger. Med dette værktøj og på baggrund af Brahes tabeller over månens bevægelse siger Newton: Månen falder mod jorden som æblet, begge følgende deres egen fysiske vilje, der er beregnelig idet viljen (eller kraften) ÆNDRER bevægelse, hvorfor der er behov for at udvikle ændringsregning (differential- og integralregning), så man kan løse ændringsligninger (differentialligninger) ved integration. Englænderne foretrækker dog bomuld for silke, og flytter bomuldsproduktionen til Nordamerika, hvilket skaber en sølvfri bytte-økonomi, trekantshandel (Bomuld <-> Jern & Våben <-> Arbejdskraft (sorte slaver) <-> Bomuld <-> osv.) Samtidig udvikles Oplysningstiden: Når æbler følger egen vilje og ikke en metafysisk formynders, kan mennesker gøre det samme og erstatte metafysisk formynderi med demokrati. To oprettes, et i USA og et i Frankrig. Demokratiet sejrer i WW2, som udvikler computere, for at styre våbenforsyningen til kamppladser.

Ændringsregning: Et rektangel har to sider f og g, dvs. med areal $A = f*g$ (antagelse $f > 0$, $g > 0$, $df > 0$, $dg > 0$).
Ændres x med dx, ændres f med df og g med dg, dvs. arealet A ændres med tre stykker $df*g + f*dg + df*dg$.
Ændringsforholdet dA/dx bliver da: $dA/dx = df/dx*g + f*dg/dx + df/dx*dg = f'*g + f*g'$ $(+f'*dg)$ da $dg \to 0$ for $dx \to 0$.
Dvs. $dA/dx = A' = (f*g)' = f'*g + f*g'$.

Med $x^2 = x*x$ fås $(x^2)' = (x*x)' = x'*x + x*x' = 2x$. Med $x^3 = x*x^2$ fås $(x^3)' = 3x^2$. Med $x^4 = x*x^3$ osv.

Med $d(x^{(a+1)})/dx = (a+1)*x^a$ gælder ved overflytning af differentiation som det modsatte, dvs. integration:
$x^{(a+1)} = (a+1) \int x^a\, dx$, da gange-konstanter hverken differentieres eller integreres, $\int x^a\, dx = x^{(a+1)}/(a+1)$.

Hvis x vokser med dx, vokser arealet A under kurven $y=f(x)$ med strimlen dA = højde*bredde $= f(x)*dx$. Det samlede areal fås da ved at opsummere strimlerne, $\int f(x)dx$, eller af ændringsligningen $dA = f(x)\, dx$, eller $dA/dx = f(x)$, eller $A(x)' = f(x)$, dvs. som stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$. Så arealet fra a til b = tilvæksten i arealet fra a til b $= \Delta F = F(b) – F(a)$.

På en enhedscirkel vil en lille x-tilvækst dx skabe en lille ensvinklet væksttrekant med vandret side $–d(\cos x)$, lodret side $d(\sin x)$, og skrå side dx. Af tilvækst-trekanten fås da: $d(\sin x)/dx = \cos x$ og $d(\cos x)/dx = -\sin x$