A

Matematik – naturvidenskaben om Mange

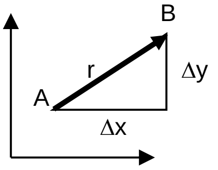
Δ-regning med formelregner

FORmler FORudsiger

Algebra

Δy = 0		y = b
Δy = a	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$	y = b + a*x
	$\frac{\Delta y/y}{\Delta x} = a$	y = b * a^x
	$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = a$	y = b * x^a
Δy = f(x)	$\frac{dy}{dx} = f(x)$	y = ∫f(x) dx
Δy = ?		y = y *gns* ± 2*Δy *gns*

Geometri



AB = $\binom{\Delta x}{\Delta y}$

r^2 = Δx^2 + Δy^2

sin A = $\frac{\Delta y}{r}$

cos A = $\frac{\Delta x}{r}$

tan A = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Kompendium

- vejen til effektiv læring

Læring formidler viden til hjerner. Et menneske har tre hjerner: en til rutiner, en til følelser og en til mening.

Som naturvidenskab om mange får matematik mening. Og mening giver den lærende lyst til at lære faget ved selv at opbygge rutiner gennem træning.

Matematik forudsiger tals ændring med formler, og består af to hovedområder:

Geometri måler trekanters længder, vinkler og arealer.

Algebra genforener tal med 2x4 regningsarter:

Opsamling:	+	*	^	∫
Opdeling:	–	/	√ & log	d/dx

Kompendiet medtager matematikkens historie og fagets betydning som et forudsigelses-sprog, der skaber grundlag for, at et moderne samfund kan opbygges på baggrund af naturvidenskab om stof i rum og tid.

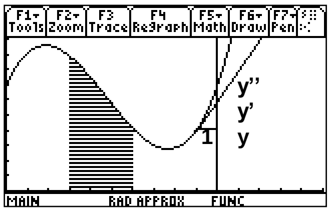
Kompendiet indeholder en introduktion til matematik-modeller, den kvantitative litteratur.

I kompendiet oplever den lærende hele tiden matematik som forudsigelse, der kan testes ved afprøvning.

Kompendiet anvender formelregneren TI-89.

Kompendier til A, B og C samt projektforslag findes på MATHeCADEMY.net.

+ 0 – 0 + *fortegn for y'*



$\int_3^6 y\,dx$

Indhold

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Version A2015

Matematik forudsiger

Matematik Algebra Opdeler og genforener tal Geometri Opmåler jord-former Statistik Reducerer mange tal til to tal	Matematik består af to hovedområder: algebra og geometri samt statistik Algebra (regning) forudsiger optælling, enten slut- eller enkelt-tallene. Geometri (jordmåling) opmåler plane figurer eller rumlige former. Statistik (tælling) beskriver talmængders midte og spredning.

Algebra betyder genforening på arabisk. Algebra kan oversættes til regning. Algebra giver svaret på spørgsmålene: Hvordan forenes enkelt-tal til en total? Hvordan opdeles en total i enkelt-tal?

Geometri betyder jordmåling på græsk. Algebra og geometri opstod som svar på de to grundlæggende spørgsmål: Hvordan deler vi jorden og det den producerer?

Oprindeligt brødfødte mennesker sig som andre dyr, som jægere og samlere.

Det første kulturskift sker med indførelse af agerbrugskultur i varme floddale, hvor alt kunne produceres, specielt peber og silke. Højlandsfolket havde ingen varer at bytte med, kun bjergenes ædelmetaller, især sølv.

Sølvminerne uden for Athen finansierede den græske kultur og det græske demokrati. Sølvminerne i Spanien finansierede det romerske imperium, som brød sammen, da minerne erobredes først af vandaler siden arabere.

Sølvets forsvinden hensætter Europa i 'mørk' middelalder. Indtil der findes en sølv-dal i Harzens bjerge (dollar = thaler). Handelsvejene genopstår og financierer italiensk renæssance og tyske fyrstendømmer. Italiens rigdom udlånes gennem banker, hvilket fører til rentesregning.

Handelen formidles igen af arabere, som udvikler den græske geometri til trigonometri, indfører en ny regnekunst, algebra. Og erstatter romertal med arabertal, som kan udganges:

XXVII*LXIV = 27*64 = (20+7)*(60+4) = 1200 + 80 + 420 + 28 = 1728 = MDCCXXIII.

Den græske geometri opstod da Pythagoras opdagede formler, som kunne bruges til at forudsige lyde og former. For at skabe vellyd skal strengens længde have bestemte tal-forhold. I retvinklede trekanter er to sider frie, men den tredie kan forudsiges af Pythagoras' læresætning: a^2 + b^2 = c^2. Pythagoras overfortolkede sin succes ved at hævde: Alt er tal.

I Athen blev filosoffen Platon inspireret af Pythagoras til at oprette et akademi, som byggede på den tro, at alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som f.eks. geometrien, der kunne udledes som eksempler på metafysiske aksiomer. 'Kom kun ind hvis du kender geometri' skrev Platon over akademiets indgang.

Platon fandt dog ikke flere formler. Og hans akademi blev omdannet til kirkens klostre, der senere blev omdannet til vore dages universiteter, stadig med lange gange med celler, hvor kommentatorer kommenterer hinandens kommentarer.

Den næste formel blev fundet i Italien af Galilei, som målte strækning s og tid t for et skråt fald på et skråplan og fandt at s=½*g*t^2. Italien gik dog fallit, fordi prisen for peber faldt til 1/3 i Lissabon, da portugiserne opdagede den anden vej til Indien rundt om Afrika, og herved kunne springe de arabiske mellemhandlere over. Spanien forsøgte at finde en tredje vej til Indien: Ved at sejle mod vest opdager de Vestindien, hvor der hverken er peber eller silke, men til gengæld rigeligt med sølv, argentum, f.eks. i sølvlandet Argentina.

Englænderne stjæler de spanske sølvflåder og forsøger at finde en fjerde vej til Indien, over havet uden landkending. Her skal man sejle efter månen, og man spurgte derfor: Hvordan bevæger månen sig?

Kirken sagde: Mellem stjernerne. Newton sagde: NEJ. Månen falder mod jorden ligesom æblet.

Hvorfor falder æblet til jorden? Kirken sagde: Det er en metafysisk vilje, som sker i himlen som på jorden. Og Herrens vilje er uberegnelig, så alt hvad du kan gøre er at tro, gå i kirke og lære at bede. Newton sagde: NEJ. Det er en fysisk vilje, som sker overalt. Men denne vilje, tyngdekraften, er beregnelig, da den kan sættes på formel. Så alt hvad du skal gøre er at vide, gå i skole og lære at regne.

Antikkens fysik sagde: Men kraft skaber bevægelse, og månen har jo ikke ramt jorden? Newton sagde: NEJ, en kraft skaber bevægelsesÆNDRING, så derfor er jeg nødt til at udvikle Δ-regning, som viser, at månen falder så skævt, at jorden er krummet væk inden den rammer, hvorfor månen udfører et evigt fald rundt om jorden.

Brahe brugte sit liv på at måle planetpositioner. Kepler fortolkede Brahes data korrekt, men kunne ikke validere sine tre love uden at opsende nye planeter. Newton kunne derimod validere sin tyngdekraft med faldende ting og penduler.

Newtons succes førte til oplysningstiden, hvor man indså, at med formler behøver man ikke mere formynderi fra de to herrer, Herremanden og Vorherre. I stedet kan oplyste mennesker opbygge et demokrati og en industrikultur baseret på formlernes evne til at forudsige naturens adfærd. Og på den varebaserede trekantshandel, der kom med englændernes opdagelsen af, at der var flere penge at tjene på bomuld end på silke, og derfor plantede bomuldsplantager i USA.

I den moderne skole findes groft sagt tre typer fag: NAT-fag som forud-siger naturen med formler, SAM-fag som bagud-siger samfundet med tabeller, og HUM-fag, som (stadig) fortolker bibliotekets tekster.

Regningsarter opsamler og opdeler

Regningsarter bruges til at forudsige totalen T. Der er 2*4 + 1 regningsarter til opsamling af/opdeling i forskellige typer tal:

Opsamling af *Opdeling i*	Variable	Konstante
Styktal (kr, kg, s)	Plus + *Minus -*	Gange * *Division /*
Pertal (kr/kg, kr/100kr, %)	Integration ∑ *Differentiation Δ*	Potens ^ *Rod √. Logaritme ln*

a kr og n kr er totalt T kr:	**a+n = T** *a = T - n*
+a n gange er totalt T kr:	**a*n = T** *a = T/n*
*a n gange er totalt T: *+7 % = *107%*	**a^n = T** *a = T^(1/n)* *n = loga(T) = lnT/lna*
a1 kg á p1 kr/kg + a2 kg á p2 kr/kg er totalt T kr: p1*a1+ p2*a2 = T:	**∑ p*a = T** *a = ΔT/p*

Al-gebra betyder at genforene på arabisk. Algebra kan oversættes til regning, forudsigelse. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan forudsiger vi optællingen af enkelttal til en samlet total, eller opdelingen af en total i enkelttal?

Der er fire måder at opsamling af enkelttal: plus (+), gange (*), potens (^) og integration (∑).

Job	Optæl	Forudsig
32kr og 63 kr	33,34,…,95	T = 32+63
2kr 36 gange	2,4, …,72	T = 2*36
*120% 5 gange	120, 144...	T= 120%^5

Plus + forudsiger opsamling af variable enkelttal:

2kr og 3 kr og 4 kr er totalt T kr: T = 2+3+4. 2: et led.

(Optælling: 1,2   3,4,5   6,7,8,9. Forudsigelse: T = 2+3+4=9 ☺).

Gange * forudsiger opsamling af konstante enkelttal:

2kr +2kr +2kr +2kr +2kr = 5 gange 2kr = T, 5*2 = T.5: en faktor.

(Optælling: 2, 4, 6, 8, 10. Forudsigelse: T = 5*2 = 10 ☺).

Potens ^ forudsiger opsamling af konstante procent-tal: 5 gange 2% er totalt T%, 1+T = 102%^5.

(Optælling: 100, 102, 104.04, 106.12, …, 110.41. Forudsigelse: T = 102%^5 = 110.41. 102%: grundtal, 5: eksponent)

Integration ∑ eller ∫ bruges ved opsamling af variable per-tal:

2kg á 7kr/kg + 3kg á 8kr/kg er 5 kg á T kr/5kg: T = 7*2 + 8*3 , T = ∑ (kr/kg)*kg, T = ∫ p*dx.

Omvendte regningsarter findes til alle regningsarter, og bruges til at opdele en total i enkelttal.

15-3 forudsiger svaret på spørgsmålet 3+? = 15, hvor totalen 15 opdeles i to uens led (ukendt led).

(Afprøvning: 3+2 = 5 nej, 3+3 = 6 nej, … Forudsigelse: ? = 15-3 = 12. Test 3+12 = 15 ☺)

$\mathbf{\frac{15}{3}}$ forudsiger svaret på spørgsmålet 3*? = 15, hvor totalen 15 opdeles i 3 ens led (ukendt faktor).

(Afprøvning: 3*2 = 6 nej, 3*3 = 9 nej, … Forudsigelse: ? = $\frac{15}{3}$ = 5. Test 3*5 = 15 ☺)

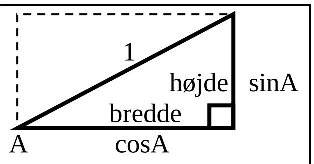
$\mathbf{\sqrt[3]{125}}$ = 125^$\frac{1}{3}$ forudsiger svaret på spørgsmålet ?^3 = 125, hvor totalen 125 opdeles i 3 ens faktorer (ukendt grundtal).

(Afprøvning: 2^3=8 nej, 3^3=27 nej, … Forudsigelse: ? = $\sqrt[3]{125}$ = 125^$\frac{1}{3}$ = 5. Test 5^3 = 125 ☺) $\frac{1}{3}$: 3reciprok.

$\log_3 243$ = ln(243)/ln(3) = log(243,3) forudsiger svaret på spørgsmålet 3^? = 243, hvor totalen 243 opdeles i ens 3faktorer (ukendt eksponent). Log er en forkortelse for $\log_{10}$. Ln er en forkortelse for $\log_e$, hvor e = 2.7182818

(Afprøvning: 3^2 = 9 nej, 3^3 = 27 nej, … Forudsigelse: ? = log(243,3) = 5. Test 3^5 = 243 ☺)

sin, cos og tan. En diagonal deler et rektangel i 2 ens retvinklede trekanter.
Lad diagonalen have længden 1.
sinA forudsiger længden af siden over for A (højden)
cosA forudsiger siden hos A (bredden).
tanA forudsiger længden af højden, hvis bredden er 1.
Omvendt forudsiger sin-1A vinklen over for højden.
cos-1A forudsiger vinklen hos bredden
tan-1A forudsiger vinklen over for højden hvis bredden er 1.



Opgaver. Besvar spørgsmålene ved afprøvning, forudsigelse og test (løs ligningerne)

1. 4+? = 20, 4*? = 20, 4^? = 20, ?^4 = 20 2. 5+? = 40, 5*? = 40, 5^? = 40, ?^5 = 40 3. 6+? = 80, 6*? = 80, 6^? = 80, ?^6 = 80 4. Fremstil selv nye ligninger med 'randMat(1,2)'	5. Indtegn på millimeterpapir en kvart cirkel med radius 10 cm. Indtegn forskellige retvinklede trekanter. Forudsig og test længden af væg og gulv. Forudsig og test vinklerne.

Formler, ligninger og kurver

En formel består af et regnestykke og det tal der udregnes.
En ligning er en formel med 1 ubekendt. En ligning løses.
En kurve er en formel med 2 ubekendte. En kurve kan tabellægges og grafes.
En ligning består af et start-tal, en beregning og et slut-tal.
Enhver beregning kan vendes om så slut-tallet tilbage-regnes til start-tallet ved at udføre den omvendte beregning.
En formel kan også kaldes en funktion.

?+3 = 15	**?*3 = 15**	**?^3 = 125**	**3^? = 243**
x+3 = 15	x*3 = 15	x^3 = 125	3^x = 243
x = 15 – 3	x = $\frac{15}{3}$	x =125^$\frac{1}{3}$	x = log3(243)
+ ↔ –	* ↔ /	eksp ↔ rod	gr.tal ↔ log

Ligningsløsning: Tal overflyttes med omvendt regnetegn
*Bemærk ombytning: 2+3 = 3+2 , 2*3 = 3*2 , 2^3 ≠ 3^2*

En ligning består af et start-tal, en beregning og et slut-tal, evt. i modsat rækkefølge: a+b = T, T = a+b.

x+3 = 15	Spørgsmål: Hvilket tal skal plusses med 3 for at give 15?
x = 15-3	Forudsigelse: 15-3 er det tal, som plusset med 3 giver 15. Test: (15-3)+3 = 15
Regel	**Plus-tal overflyttes som minus-tal, og omvendt**

x*3 = 15	Spørgsmål: Hvilket tal skal ganges med 3 for at give 15?
x = $\frac{15}{3}$	Forudsigelse: $\frac{15}{3}$ er det tal, som ganget med 3 giver 15. Test: $\frac{15}{3}$ *3 = 15
Regel	**Gange-tal overflyttes som divisions-tal, og omvendt**

x^3 = 125	Spørgsmål: Hvilket tal skal opløftes i 3de for at giver 15?
x =125^$\frac{1}{3}$	Forudsigelse: $\sqrt[3]{125}$ = 125^$\frac{1}{3}$ er det tal, som opløftet i 3de giver 15. Test: (125^$\frac{1}{3}$)^3= 125
Regel	**Eksponent overflyttes som reciprokke eksponenter og omvendt**

3^x = 243	Spørgsmål: Hvad er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243?
x = log3(243)	Forudsigelse: log3(243) er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243. Test: 3^log3(243)= 243
Regel	**Grund-tal overflyttes som logaritme, og omvendt**

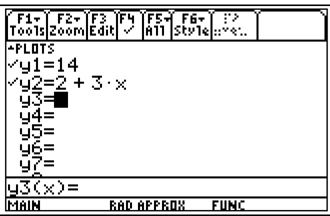
Et dobbelt regnestykke indeholdende flere regnestykker reduceres til et enkelt regnestykke med en skjult parentes om det stærkeste regnestykke (prioritet: (), ^, *, +): T = 2+3*4 = 2+(3*4) , T = 2+3^4 = 2+(3^4) , T = 2*3^4 = 2*(3^4)

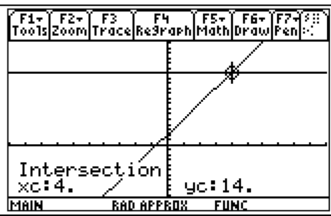
Formel-skema bruges til dokumentation af ligningsløsning

Her skrives det ukendte tal	c = ?	T = a+b*c	*Her skrives formlen*
Her skrives de kendte tal	a = 2	14 = 2+(3*c)	*Fra dobbelt til enkelt regnestykke med skjult parentes*
	b = 3	14-2 = 3*c	*+ over flyttes som det modsatte, -*
	T = 14	$\frac{(14-2)}{3}$ = c	** over flyttes som det modsatte, /*
			Parentes om det regnestykke der var i forvejen
		4 = c	*Løsningen beregnes*
Her udføres test	Test	V.S. = H.S.	*Løsningen testes fordi vi har overflyttet tal*
		14 = 2+3*4	
		14 = 14 ☺	

Alternativ1: 'solve(14 = 2+3*x,x)' giver 'x = 4'

Alternativ2: På formelregnerens y-liste indtastes
Y1 = Venstre side V.S. = 14
Y2 = Højre side H.S. = 2+3x
Løsningen er da kurvernes skæringspunkt.





Ved modsat fortegn flyttes den ubekendte først:

c = ?	T = a – c
	T + c = a
	c = a – T

c = ?	T = $\frac{a}{c}$
	T * c = a
	c = a/T

Opgaver

Find de ukendte tal for formlen.
Opstil bagefter selv en ny tabel med randMat(1,3)

1. T = a+b*c
2. T = a+b/c
3. T = a*b^c
4. T = a+b^c
5. T = a-b*c
6. T = a-b/c
7. T = a/b^c
8. T = a-b^c

	T	b	a	c
1		1.5	12	20
2	60		12	20
3	60	1.5		20
4	60	1.5	12	

Konstant vækst: Lineær, eksponentiel, potentiel og opsparing

Lineær (konstant hældning a):	+1 dag, +5 kr	y = b+a*x,	x:+1, y:+a	++ vækst
Eksponentiel (konstant rente r%):	+1 dag, +5 %	y = b*a^x = b*(1+r)^x,	x:+1, y:+r%	+* vækst
Potens (konstant elasticitet a):	+1 %, +5 %	y = b*x^a,	x: +1%, y: +a%	** vækst
Opsparing (konstant rente&indskud):	+1 dag, +5 %&+5kr	y = a*R/r,	x:+1, y:+r% & y:+a	+&*vækst

Vækstmål: **Tilvækst** y = Δy = y2 – y1. **Indeks** y = Iy = y2/y1. **Rente** r = Δy/y = Iy – 1. **Samlet rente** R: 1 + R = (1+r)^n.

x	y
5	10
7	16

	Tilvækst Δ	Indeks I
y	16–10 = 6	16/10 = 1.6
x	7–5 = 2	7/5 = 1.4

Gns. tilvækst	a*2 = 6	a = 6/2 = 3
Gns. rente	(1+r)^2 = 1.6	r = 1.6^(1/2)-1 = 0.27 = 27%
Gns. elasticitet	1.4^a = 1.6	a = log1.4(1.6) = 1.40

Lineær vækst forekommer ved køb eller leje:
b kr + x dage à 5 kr/dag er totalt T kr: T = b+5*x   Δy = a*Δx   y-yo = a*(x-xo)

Eksponentiel vækst forekommer ved rentetilskrivning
b kr + x dage à 5 %/dag er totalt T kr: T = b*(1+0.05)^x   Iy = a^Δx   y/yo = a^(x-xo)

Potensvækst forekommer ved tekniske formler
Øges længden x med 1%, øges styrken T med 0.67 %: T = b*x^0.67   Iy = Ix^a   y/yo = (x/xo)^a

Lineær vækst	Eksponentiel vækst	Potens vækst
Δy = a*Δx Δy/Δx = a	Iy = a^Δx Iy^(1/Δx) = a	Iy = Ix^a logIx(Iy) = a
6 = a*2 a = 6/2 = 3	1.6 = a^2 a = 1.6^(1/2) = 1.27	1.6 = 1.4^a a = log1.4(1.6) = 1.40

Vækstopgaver opstilles som tabeller:

Tabel	Lineær vækst	Eksponentiel vækst	Potentiel vækst
see table below	**y-yo = a*(x-xo)** 7-5 = a*(6-2) $a = \frac{2}{4} = 0.5$ y-5 = 0.5*(x-2) y = 0.5*x + 4 y = 0.5*9 + 4 = **8.5** 12 = 0.5*x + 4 $x = \frac{12-4}{0.5}$ = **16**	**y/yo = a^(x-xo)** 7/5 = a^(6-2) a = ($\frac{7}{5}$) ^ $\frac{1}{4}$ = 1.088 y/5 = 1.088^(x-2) y = 4.226*1.088^x y = 4.226*1.088^9 = **9.01** 12 = 4.226*1.088^x x = log1.088(12/4.226) = **12.4**	**y/yo = (x/xo)^a** 7/5 = (6/2)^a a = log3($\frac{7}{5}$) = 0.306 y/5 = (x/2)^0.306 y = 4.044*x^0.306 y = 4.044*9^0.306 = **7.93** 12 = 4.044*x^0.306 x = ($\frac{12}{4.044}$) ^ $\frac{1}{0.306}$ = **34.9**

x	y
2	5
6	7
9	?
?	12

a- og b-tallene kan også findes ved regression. Beregningerne kan også udføres i et formel-skema. Resultatet kan også findes ved indtegning af hhv. lineær, eksponentiel og potentiel vækst på tekniske papir:

++ papir (millimeter-papir), +* papir (enkeltlogaritmisk-papir) og **papir (dobbeltlogaritmisk-papir).

Eksponentiel vækst giver konstant fordoblings(halverings)tid: a^T =2 gir T =loga(2) = $\frac{\ln(2)}{\ln(1+r)}$. a^T = ½ gir T = $\frac{\ln(½)}{\ln(1+r)}$.

Samlet rente R, rentes rente RR. 10 år á 5% = 50% + 12.9% (RR) = 62.9% (R) da 1.05^10 = 1.629.
Opsparingsvækst. På konto 1 indsættes 1 kr, på konto 2 alle rentebeløb fra konto 1 + renter af konto 2. Konto 2 udføres da opsparingsvækst da den modtager +r% + rkr. Slutopsparing er den samlede rente R. Dvs. et indskud på r kr opsparer R kr. Et indskud på a kr vil da opspare a/r gange så meget. Efter n terminer er der da opsparet y = a/r*R, hvor samlet rente R: 1+R = (1+r)^n. Opsparingsvækst er en kombination af lineær og eksponentiel vækst.
En opsparing kan f.eks. bruges til at afbetale et lån G. Et låns løbetid x er da bestemt af formlen G*(1+r)^n = a/r*R.

Opgaver. Forudsig svaret, og test svaret både med grafer på formelregneren og på teknisk papir

1. Hvad er billigst: 40kr+3kr/dag eller 60kr+2kr/dag?
2. Hvad er billigst: 60kr+4kr/dag eller 90kr+3kr/dag?
3. Hvem er rigest: 120kr-4kr/dag eller 80kr-2kr/dag?
4. Hvem er rigest: 160kr-5kr/dag eller 120kr-3kr/dag?
5. Hvem er rigest: 120kr+4%/dag eller 180kr+2%/dag?
6. Hvem er rigest: 120kr-4%/dag eller 80kr-2%/dag?
7. Hvor er mest: 120kg+10 kg/dag eller 150kg +3%/dag?
8. Hvor er mest: 80kg -2kg /dag eller 100kg -5%/dag?
9. 7. og 8. Kaldes Malthus' problem. Hvem var Malthus?
10. Hvad bøjer mest: 20m+3%/% eller 30m+2%/%
11. Hvad bøjer mest: 20m+0.3%/% eller 30m+0.2%/%
12. Lån 10000. Ydelse 500. Rente 3%. Løbetid = ?
13. Lån 10000. Ydelse = 500. Rente ?. Løbetid = 240.
14. Lån 10000. Ydelse = ?. Rente 3%. Løbetid = 360.
15. Lån ?. Ydelse = 700. Rente 3%. Løbetid = 120.
16. 5 år á 9% gir ?%. 8 år á ?% gir 80%. ? år á 9% gir 90%.
17. 3%/år fordobles på ? år. ?%/år fordobles på 40 år.
18. -5%/år halveres på ? år. ?%/år halveres på 50 år.

19. Besvares med alle 3 vækstformer:

	y	b	a	x
1	?	10	1.2	20
2	34	?	1.2	20
3	34	10	?	20
4	34	10	1.2	?

20. Løs tabelopgaverne med alle 3 vækstformer

x	y		x	y
10	20		12	40
15	33		16	24
18	?		20	?
?	50		?	10

Variabel vækst, calculus: Polynomier

0. grads polynomium fastlægger højde	y = 5
1. grads polynomium fastlægger højde + stigning	y = 5 + 2*x
2. grads polynomium højde + stigning + krumning	y = 5 + 2*x + 0.3*x^2
3. grads polynomium fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning	y = 5 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3

Krumme polynom-kurver med højere grad end 1 har en række interessante punkter:

Vendepunkter, enten top-punkt (maximum) eller bund-punkt (minimum).
Skæringspunkter med x-akse (nulpunkter), med y-akse (start-punkt), og med andre kurver.
Skæringspunkter med vandrette linier (ligningsløsning), og med lodrette linier (værdier).
Krumningsskift, hvor krumningen skifter fortegn, og hvor der derfor findes en vendetangent.
Tangent-punkt. En tangent er en ret linie, der er praktisk taget sammenfaldende med kurven omkring røringspunktet.
En tangent viser hvordan kurven vil se ud, hvis stigningen i punktet forbliver uændret.

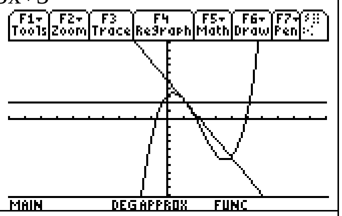
Hvis kurven er en pertals-kurve aflæses totalen som arealet under kurven, dvs. ved integration
Hvis kurven er en total-kurve, aflæses pertallet som stigningen på kurven, dvs. ved differentiation.
Krumningen fås ved at differentiere to gange. Ved positiv krumning krummes opad, ved negativ nedad.

Eksempel: y = 0.5x^3-3x^2+2x+3

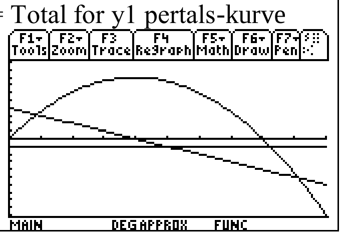
0.37 3.63 x
+ 0 – 0 +
y = 0.5x^3-3x^2+2x+3
y’ = 1.5x^2-6x+2
y’ = 0 for x = 0.37 og 3.63
Monotoni: Y vokser: x < 0.37, x > 3.63
Y aftager: 0.37 < x < 6.33
Test:
Solve(d(y1(x),x) > 0,x) giver x < 0.37, x > 3.63
Solve(d(y1(x),x) < 0,x) giver 0.37 < x < 6.33

Skæringspunkt	Aflæst graf.	Forudsagt ved formel
Med y-akse	y = 3	y1(0) eller y1(x) | x = 0
Med x-akse	x = -0.694 x = 1.748 x = 4.946	Solve(y1(x) = 0,x)
Med y = 2	x = -0.329 x = 1.181 x = 5.147	Solve(y1(x) = 2,x)
Med x = 3	y = -4.5	y1(3) eller y1(x) | x = 3
Med tangent ’Intersection’	(x,y) =(1,2.5) (x,y) = (4,-5)	Solve(y1(x) = y2(x),x)
Toppunkt ’Maximum’	x = 0.367 y = 3.355	Solve(d(y1(x),x) = 0,x) fmax(y1(x),x) | 0<x and x<5
Bundpunkt ’Minimum’	x = 3.633 y = -5.355	Solve(d(y1(x),x) = 0,x) fmin(y1(x),x) | 0<x and x<5
Krumningsskift ’Inflection’	x = 2.0 y = -1.0	F5 Inflection, eller solve(d(d(y1(x),x),x) = 0,x)
Stigning i x = 3	-2.5	d(y1(x),x) | x = 3
Areal fra 2 til 4	8	∫(y1(x),x,2,5)
Tangent i x = 1	y = -2.5x+5	F5 tangent, x = 1

y1(x) = 0.5x^3-3x^2+2x+3
y2(x) = 2 , y3(x) = -2.5x+5



y1(x) = 4 - 1x
y2(x) = d(y1(x),x) = pertal hvis y1 er en Total-kurve
y3(x) = ∫(y1(x),x,0,x) = Total for y1 pertals-kurve



Opgaver

1. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = 0.7x^3-4x^2+3x+4.
2. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = -0.4x^3+2x^2-0.5x-3.
3. Fremstil selv polynom-formler ved brug af randPol(x,3). Eller ved brug af tabeller og regression.
4. Vis forskellige måder at vokse fra (0,0) til (1,1) ved hjælp af polynomier af 1. grad, 2. grad og 3. grad.
5. Dimensioner billigste kasse uden låg indeholdende 1liter
6. Dimensioner billigste rør uden låg indeholdende 1liter
7. Dimensioner billigste kasse uden låg el. bund indeh. 1 l.
8. Dimensioner billigste rør uden låg el. bund indeh. 1 l.
9. Dimensioner billigste kasse indeholdende 1liter, hvor lågets materiale er dobbelt så dyrt som resten.
10. Som 9, nu blot rør.
11. y1 er et polynomium af grad 0.
Hvis y1 er en Totalkurve, hvordan ser pertals-kurven ud?
Hvis y1 er en pertals-kurve, , hvordan ser Totalkurven ud?
12. Som 5 men med polynomium af grad 1.
13. Som 5 men med polynomium af grad 2.
14. Som 5 men med polynomium af grad 3.

Tal, tabeller og formel-regression

2357 = 2*10^3 + 3*10^2 + 5*10 + 7 34.67 = 3*10 + 4 + 6*10^-1 + 7*10^-2 345.72 = 3.457 * 10^2 = 3457.2 * 10^-1	Et 4-cifret tal er et polynomium bestående af 4 optællinger af styk, bundter, bundt-bundter, bundt-bundt-bundter En vektor er en tal-liste. En matrice er en vektor-liste

Et tal angiver resultatet af en optælling. Ved optælling tælles enkeltstyk, bundter, bundter af bundter osv.

T = 235 = 2 bundt-bundter + 3 bundter + 5 enkeltstyk = 2*10*10 + 3*10 + 5 = 2*10^2 + 3*10^1 + 5*10^0

T = 34.67 = 3 bundter + 4 enkeltstyk + 6 opdelte + 7 opdelte opdelte = 3*10^1 + 4*10^0 + 6*10^-1 + 7*10^-2

Et 10bundt kan opdeles i 10 enkeltdele. Ligeledes kan en enkeltdel betragtes som et 10bundt af 10 opdelte, hvor hver opdelt igen kan betragtes som et 10bundt af 10 opdelte osv.

Bemærk at 10^1 = EE1 = 10, 10^0 = 1, 10^-1 = $\frac{1}{10\text{^}1}$ = 0.1, 10^-2 = $\frac{1}{10\text{^}2}$ = 0.01 osv. (test på formelregner)

Andre bundtstørrelser. 6: T = 235 = 2*6^2+3*6+5 = 95 = 9*10+5. 2: 1011 = 1*2^3+0*2^2+1*2+1 = 11

Nogle tal kan betragtes som regnestykker: -5 = 0-5 , $\frac{3}{7}$ = 3/7 , 7% = $\frac{7}{100}$ = 0.07

Specielle tal.

π = 3.1416… = n*sin (180/n) for n stor: Overgrænse (grænseværdi) for omkredsen af et symmetrisk hegn med n kanter som er indskrevet i en cirkel med radius 1.

e = 2.7182818 = (1+1/n)^n for n stor = 100% kontinuert tilskrevet: Overgrænse (grænseværdi) for rentes rente udbyttet. (100% pr år (mafia-rente) kan maksimalt blive til 171.82% ved at øge antallet af tilskrivninger).

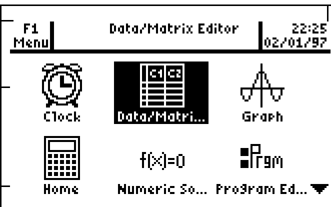
Fra tabel til formel

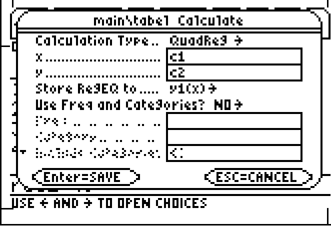
En formel kan bruges til at opstille en tabel. Omvendt en formel også tilpasses til en tabel ved regression.

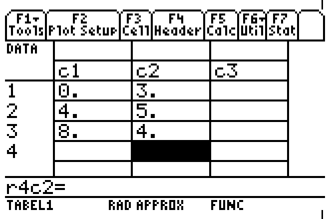
1punkts tabel fastlægger højde	y = 3
2punkts tabel fastlægger højde + stigning	y = 3 + 2*x
3punkts tabel fastlæger højde + stigning + krumning	y = 3 + 2*x + 0.3*x^2
4punkts tabel fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning	y = 3 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3

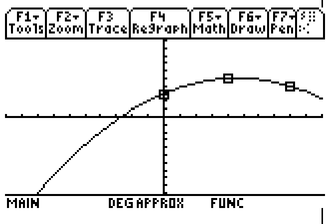
En tabel oprettes under Data/Matrixeditoren som data-tabel med navnet 'tabel'.
Formlen opstilles ved regression under F5 Calc og lagres under y1(x).

1p. tabel	x: 0; y: 3	y = 3
2p. tabel	x: 0, 4; y: 3, 5	y = 0.5*x + 3 fundet ved LinReg
3p. tabel	x: 0, 4, 8; y: 3, 5, 4	y = -0.094*x^2 + 0.875*x + 3 fundet ved QuadReg Find vendepunkt, tangent, areal og stigning Forudsig svaret og test grafisk
4p. tabel	x: 0, 4, 8, 10; y: 3, 5, 4, 6	y = 0.030*x^3 -0.456*x^2 + 1.842*x + 3 fundet ved CubicReg Find vendepunkter, tangent, areal og stigning Forudsig svaret og test grafisk









Opgaver

1. Omskriv tallene 2, 34, 567 og 24689 til polynomier. 2. Omskriv tallene 2.3, 34.67 og 254.689 til polynomier. 3. 5bundteren optalte 32. Hvad optalte 3bunteren? 7budteren? Ti-bundteren? 4. 2bundteren optalte 11011. Hvad optalte 3bundteren? 5bundteren? Ti-bundteren? Tyve-bundteren?	5. Hvorfor hedder syvti halvfrjers? 6. Find et 3. gradspolynomium med 'randPol(x,3). Opstil en 4punkts tabel. Lav kubisk regression. 7. Som 5 med et 2. gradspolynomium. 8. Som 5 med et 1. gradspolynomium. 9. Som 5 med et 4. gradspolynomium. 10. Opstil polynomier af 0., 1., 2. og 3. grad ud fra den venstre tabel:	11. Opstil polynomier af 0., 1., 2. og 3. grad ud fra den højre tabel. 12. Opstil to polynomier af 1.grad ud fra den højre tabel.

Venstre tabel:

x	y
2	8
5	6
7	9
12	5

Højre tabel:

x	y
2	4
5	6
8	7
12	9

Differential-ligninger mm.

Fra niveau til vækst med differentiation Fra vækst til niveau med integration eller diff.ligning	Diff.ligninger løses ved at integrere, ved at separere de variable eller ved ’ F3 desolver’

En differentialeligning fortæller, hvad en formel er differentieret. Opgaven er at finde formlen udifferentieret.

1) y og x er separeret: Integration. y’ = dy/dx = 2x, y(0) = 6.
Løsning: ∫dy = ∫2xdx, dvs. y = x^2 + k, dvs. 6 = 0+k, dvs. k = 6, dvs. y = x^2 + 6
Test: Venstre Side = y’ = (x^2 + 6)’ = 2x. Højre Side = 2x. y(0) = 6. Da VS = HS og y(0) = 6, er y en løsning.

2) y og x kan separeres: y’ = dy/dx = 6x/y, y(0) = 7.
Løsning: ∫ydy = ∫6xdx, dvs. ½y^2 = 3x^2 +k, dvs. y = √(6x^2 + 2k), dvs. 6 = √0+2k, dvs. k = 18, dvs. y = √(6x^2 + 36)
Test: Venstre Side=y’= (√(6x^2 + 36))’ = 6x/√(6x^2 + 36). Højre side = 6x/y = 6x/√(6x^2 + 36). y(0) = 6. Dvs. løsning.

3) Med formelregner bruges ’F3 desolver’
desolve (y’ = 2-3y and y(0) = 8, x,y) giver y = 2/3 + 22/3e^(-3x). Husk at teste.
desolve (y’ = y(2-3y) and y(0) = 8, x,y) giver y = 8e^(2x)/(12e^(2x) – 11). Husk at teste.
desolve (y’ = 2y(100-y) and y(0) = 8, x,y) giver y = 200e^(200x)/(2e^(200x) + 23). Husk at teste.
desolve (y’ + 2xy = 4x and y(0) = 8, x,y) giver y = 6e^(-x^2) + 2. Husk at teste.

Sammensatte formler og produkter

Ved sammensætning sættes en indre formel ind i en ydre.	Ved differentiation og integration skilles de ad.

Ved differentiation benyttes kæde-reglen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

y = (x^2+3)^4 = u^4, hvor u = x^2+3. Dvs. y’ = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$ = 4u^3 * 2x = 8x*(x^2+3)^3

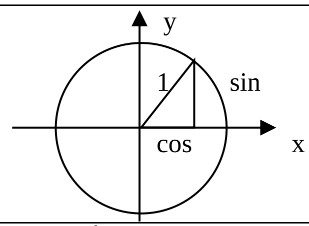
Ved integration sættes den indre formel til u

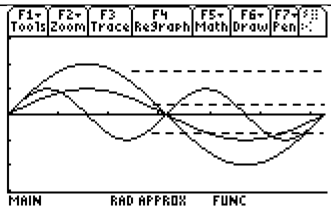
I = ∫x(x^2+5)^3dx = ∫x*u^3 $\frac{du}{2x}$ = ½ ∫u^3 du = 1/8 u^4 = 1/8 (x^2+5)^4. Test ved differentiation.	u = x^2 + 5 $\frac{du}{dx}$ = 2x, dvs. $\frac{du}{2x}$ = dx

Differentiation af produkter bruger parenteser: y = f*g = (x^2)*(sinx), y’ = (f*g)’ = f’*g + f*g’ = 2x*sinx + x^2*cosx

Svingende vækst

På en cirkelbevægelse vil både x og y udføre svingninger.
Af den fremkomne trekant ses, at disse svingninger beskrives af sinus og cosinus.
På en formelregner ses, at y = sinx og y = cosx beskriver svingninger.
x måles i radian, dvs. π/180*vinkel.





y = 2sin(x)
y = sin(x)
y = sin(2x)

Løsning af ligningen sin x = 0.5: ’solve(sinx = 0.5, x) | 0<x and x<2π’ giver ’x = 0.524 or x = 2.62’

Tilbageregning af formler for cirkler og kugler

Find centrum og radius i x^2 – 4*x + y^2 + 6*y + z^2 – 8*z = 20

(x – xo)^2 x^2 – 2xo*x x^2 – 4*x	+ (y – yo)^2 + y^2 - 2yo*y + y^2 + 6*y	+ (z – zo)^2 + z^2 – 2zo*z + z^2 – 8*z	= r^2 = r^2 – xo^2 – yo^2 – zo^2 = 20
-2xo = -4 xo = -4/-2 = 2	-2yo = 6 yo = 6/-2 = -3	-2zo = -8 zo = -8/-2 = 4	20 = r^2 – 4 – 9 – 16 r^2 = 20 + 29 = 49 = 7^2

Løsning: Centrum i (x,y,z) = (2,-3,4) og radius = 7

Lav selv kugler: Centrum (2,1,-5) og radius 4. Expand (x-2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2-16 giver x^2-4x+y^2-2y+z^210z+14

Lav selv andengradsligninger: Expand (x-4)^2 – 6^2 giver x^2 – 8x – 20.

Løsning af 2gradsligningen x^2+bx+c=0

(x-p)^2 x^2 – 2px x^2 – 6x	– q – q + p^2 +8	 x^2 – 6x + 8 = 0
-2p = -6 p = -6/-2 = 3	8 = -q +9 q = 9-8 = 1	(x – 3)^2 – 1 = 0 x = 3 ±√1, dvs. x = 4, x = 2

KI^2 tovejs tal

Opgave: Rygere blandt kvinder og mænd? Forskels-tallet mellem tabellens kolonner findes som en to-vejs χ^2-tal.

	K	M	T
R	5	12	17
N	7	6	13
T	12	18	30

K	M
$\frac{17}{30}$ *12 = 6.8	$\frac{17}{30}$ *18 = 10.2
$\frac{13}{30}$ *12 = 5.2	$\frac{13}{30}$ *18 = 7.8
12	18

K	M
$\frac{(5 - 6.8)^2}{6.8}$ = 0.476	$\frac{(12 - 10.2)^2}{10.2}$ = 0.318
$\frac{(7 - 5.2)^2}{5.2}$ = 0.623	$\frac{(6 - 7.8)^2}{7.8}$ = 0.415
1.099	0.733

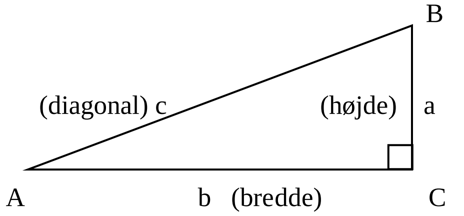
χ^2 Total = 1.099+0.733 = 1.832

På en formelregner indtastes tabellen i StatList, hvorefter der udføres en F6 χ 2 2-Way test. En χ^2 tabel afgør kritiskhed.

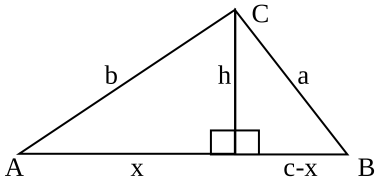
Koordinat-fri geometri

Ethvert jordstykke kan opdeles i trekanter Enhver trekant kan opdeles i 2 retvinklede trekanter	To Græske formler: A+B+C = 180 a^2 + b^2 = c^2 Tre Arabiske formler: $\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\tan A = \frac{a}{b}$

For at kunne tegne en trekant skal man kende 3 stykker (vinkler eller sider), og de sidste 3 stykker kan så forudsiges ved hjælp af 3 formler. Grækerne udviklede kun to formler, hvorfor trekantregning først kunne begynde da araberne kom med yderligere tre formler.

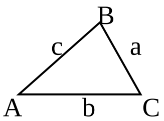
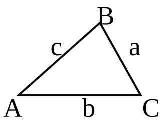
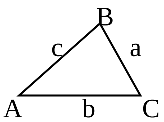
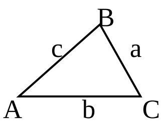
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Græske formler:
A+B+C = 180 og a^2 + b^2 = c^2 (Pyhtagoras)
Arabiske formler:
$\sin A = \frac{a}{c}$ (højde i % af diagonal)
$\cos A = \frac{b}{c}$ (bredde i % af diagonal) $\tan A = \frac{a}{b}$ (højde i % af bredde)</td>
</tr>
</table>

For at kunne regne på en ikke retvinklet trekant, opdeles den i to retvinklede trekanter ved hjælp af en højde h:

<table>
<tr>
<td>

Hvis C er 90 gælder
$\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ og $\cos B = \frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$
dvs. b^2 = xc og a^2 = c^2-xc
dvs. a^2 +b^2 = c^2 (Pythagoras)</td>
<td>Sinus-relationer:
Af venstre og højre trekant fås:
$\sin A = \frac{h}{b}$ og $\sin B = \frac{h}{a}$
b*sinA = h og a*sinB = h
b*sinA = a*sinB
eller ved overflytning
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
Sidste del fra anden højde.</td>
<td>Cosinus-relationer:
b^2 = h^2+x^2, dvs. h^2 = b^2-x^2
a^2 = h^2+(c-x)^2, dvs. h^2 = a^2-(c-x)^2
solve(a^2-(c-x)^2 = a^2-x^2,x) giver
$x = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2*c}$ eller 2*c*x = -a^2+b^2+c^2
$\cos A = \frac{x}{b}$, dvs. b*cosA = x, som indsat giver
a^2 = b^2+c^2 – 2*b*c*cosA. Tilsvarende fås
b^2 = a^2+c^2 – 2*a*c*cosB og
c^2 = b^2+a^2 – 2*b*a*cosC</td>
</tr>
</table>

De fire trekantstilfælde:

<table>
<tr>
<td>VSV: Vinkel Side Vinkel
A=32
b=8
C=71

</td>
<td>Solve(32+B+71=180,B)
B = 77</td>
<td>Solve($\frac{a}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 77}$,a)
a = 4.351</td>
<td>Solve($\frac{c}{\sin 71} = \frac{8}{\sin 77}$,c)
c = 7.763</td>
</tr>
<tr>
<td>SVS: Side Vinkel Side
c=7
A=41
b=9

</td>
<td>Solve(a^2 = 9^2+7^2 – 2*9*7* cos41,a)
a = 5.908</td>
<td>Solve(9^2 = 5.9^2+7^2 – 2*5.9 *7*cosB, B) │ 0<B and B<180
B = 88.0</td>
<td>Solve(41+88+C=180,C)
C = 51</td>
</tr>
<tr>
<td>SSS: Side Side Side
a=5
b=8
c=6

</td>
<td>Solve(5^2 =8^2+6^2 – 2*8*6* cosA, A)) │ 0<A and A<180
A = 38.6</td>
<td>Solve(8^2 = 5^2+6^2 – 2*5*6 *cosB, B)) │ 0<B and B<180
B = 92.9</td>
<td>Solve(38.6+92.9+C=180,C)
C = 48.5</td>
</tr>
<tr>
<td>VSS: Vinkel Side Side
A=28
b=11
a=9

</td>
<td>Solve($\frac{11}{\sin B} = \frac{9}{\sin 28}$,B) │ 0<B and B<180
B = 35.0 og B = 145.0</td>
<td>Solve(28+35+C=180,C)
C = 117
Solve(28+145+C=180,C)
C = 7</td>
<td>Solve($\frac{c}{\sin 117} = \frac{9}{\sin 28}$,c)
c = 17.081
Solve($\frac{c}{\sin 7} = \frac{9}{\sin 28}$,c)
c = 2.336</td>
</tr>
</table>

Opgaver: Brug formel-formular og husk at teste løsningen. Brug randMat(1,3) til at frembringe 3 tal til flere opgaver.

<table>
<tr>
<td>1. Beregn de tomme felter
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr>
<tr><td>1</td><td>32</td><td>63</td><td></td><td>25</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>47</td><td></td><td>69</td><td></td><td>47</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>36</td><td></td><td></td><td>12</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>67</td><td></td><td>14</td><td></td><td>23</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td>34</td><td>18</td><td></td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>12</td><td>15</td><td>19</td></tr>
<tr><td>7</td><td>37</td><td></td><td>90</td><td></td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td>90</td><td>14</td><td>16</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>2. Hvordan flyttes en ting hurtigst fra et punkt i et område til et punkt i et andet område, når vi bevæger sig med forskellig hastighed i de to områder?
3. Bestem højden af en høj ting (en flagstang) på to forskellige måder: Den lette, hvor vi kan komme helt hen til tingen, og den svære, hvor vi ikke kan.
4. Tip en plade 30 grader og indtegn en vej op, der højst må stige 20 grader (en ’hårnåle’ -vej). Gentag øvelsen med andre gradtal. Hvor meget øges tyngdens træk i en bil, når vejens stigning øges med 10 grader?</td>
</tr>
</table>

Koordinat-geometri

Et koordinat-system koordinerer geometri og algebra Et punkts koordinater fortæller om rejsen til punktet Med fast udgangspunkt fås koordinat-geometri Med variabelt udgangspunkt fås vektor-geometri	Et punkt P har 2 koordinater i et 2D koordinatsystem Et punkt P har 3 koordinater i et 3D koordinatsystem Et punkt P har 5 koordinater i et 5D koordinatsystem Fysik arbejder med 2D og 3D. Økonomi også med 4D, 5D osv.

Punkt-geometri handler om at opdele planen og rummet i punkter, linier og trekanter: P(x1,y1), Q(x2,y2,z2), y = ax+b.

Vektor-geometri handler om at beskrive rejser i planen eller rummet. Vektor **a** = rejse **a** = **PQ** = (Δx, Δy) = (x2-x1, y2-y1).

Koordinat-geometri handler om at forene geometri og algebra, så geometriske opgaver kan løses algebraisk, og modsat. Dvs. så f.eks. skæringspunkter mellem geometriske objekter finde ved at løses deres ligninger, og modsat.

Koordinat-geometri handler også om at forene rum og tid, samt forene ÆNDRING i rum med ÆNDRING i tid.

1D-geometri. I 1 dimension kan man bevæge sig frem og tilbage med en given hastighed **r** m/s. Stedet **s** findes da ved at plusse rejsen (meter/sekund * sekunder) til start-stedet **so**: **s = so + t*r**. x kaldes frem&tilbage-tallet

2D-geometri. 2 dimensioner fremkommer, når man også kan bevæge sig VÆK fra sit oprindelige rum, som så bliver et 1D underrum. VÆK-rejsen (VÆK-vektoren) kaldes en normal-vektor til underrummet. Da cosinus til 90 er nul, vil cosinus til to rejser afgøre, om der er tale om en rejse i underrummet eller væk fra underrummet. y kaldes op&ned -tallet

For at måle væk-graden mellem to rejser **a** og **b**, defineres deres prikprodukt som **a** • **b** = |**a**| * |**b**| * cos v.

Tilsvarende måles graden af ensretning med sinus, så deres kryds-produkt defineres som **a** x **b** = |**a**| * |**b**| * sin v.

v angiver vinklen mellem de to rejser, og |**a**| angiver rejsens længde i meter. Man kan vise, at

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \cos v = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} = a1*b1 + a2*b2 \text{ (gange lige-over). Samt } \mathbf{e} = \frac{1}{\mathbf{a}} * \mathbf{a} \text{ og } |\mathbf{a}| = \sqrt{(a1\text{^}2 + a2\text{^}2)}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \sin v = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1*b2 - a2*b1 \text{ (gange over kors. Det er gratis at gå ned, koster fortegn at gå op)}$$

Ortogonaltest: Hvis **a** • **b** = 0, så er de to rejser **a** og **b** hinandens væk-rejser, dvs. vinkelrette (ortogonale) på hinanden.

Paralleltest: Hvis **a** x **b** = 0, så er de to rejser **a** og **b** ensrettede eller modsat rettede.

Hvis de ikke er vinkelrette, kaster **b** en skyggevektor på **a**: $\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mathbf{a}\text{^}2} * \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mathbf{a}} * \mathbf{e}$, hvor **e** er enhedsvektor i **a**'s retning.

En 2D rejse vil føre til et slutsted **s**, som har bevæget sig væk fra startstedet **so** i to retninger

s = so + Δs, eller med koordinater: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$. Eller som rejse: $\Delta\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - xo \\ y - yo \end{pmatrix}$

I 2D er en linie i et 1D underrum. Liniens ligning kan da beskrives på to måder:

- **Parameterform**: Som en rejse i underrummet med startpunkt **so** og hastighed **r**: **s = so + t*r** , eller $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix}$
- **Normalform**: Som en rejse væk fra underrummets væk-vektor **n**: **n** • **s** = 0, eller $\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = n1*(x-x1)+ n2*(x-x2)= 0$

3D-geometri. Med 3 dimensioner kan man også bevæge sig VÆK fra sit oprindelige 2D rum, som så bliver et 2D underrum. Dvs. 3D-geometri er stort set som 2D-geometri, blot tilføjes en ekstra koordinat, ud&ind-tallet z:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \cos v = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = a1*b1 + a2*b2 + a3*b3 \text{ (gange lige-over)}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \sin v = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix} = \text{Fortsæt nedad. Finger over. Gang over kors. Gratis ned , koster op.}$$

I 3D er linien et 1D under-underrum og beskrives på parameterform: **s = so + t*r**, eller $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xo \\ yo \\ zo \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{pmatrix}$

I 3D er planen et 2D underrum og beskrives som en rejse **v** væk fra underrummets væk-vektor **n**:

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{v} = 0, \text{ eller } \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = n1*(x-x1) + n2*(x-x2) + n3*(z-z3) = 0$$

I 2D er afstanden fra et punktet P(x1,y1) til underrummet ax+by+c = 0 dist(P,U) = $\frac{|ax1+by1+c|}{\sqrt{(a\text{^}2+b\text{^}2)}}$

I 3D er afstanden fra et punktet P(x1,y1,z1) til underrummet ax+by+cz+d=0 dist(P,U) = $\frac{|ax1+by1+cz1+d|}{\sqrt{(a\text{^}2+b\text{^}2+c\text{^}2)}}$

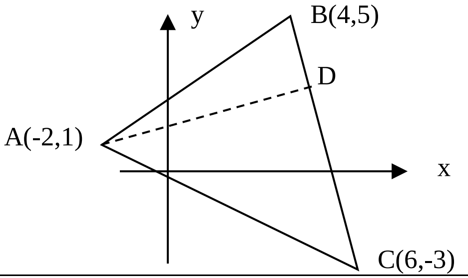
2D-geometri

Givet: A(-2,1), B(4,5), C(6,-3)

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4--2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AB}| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52} = 7.21$

$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 6--2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AC}| = \sqrt{80} = 8.94$

$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{BC}| = \sqrt{68} = 8.25$



$A = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{AB}\bullet\mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}|\,|\mathbf{AC}|}\right) = 60.3$, $B = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{BA}\bullet\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}|\,|\mathbf{BC}|}\right) = 70.3$, $C = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{CA}\bullet\mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}|\,|\mathbf{CB}|}\right) = 49.4$

$\mathbf{BD} = \mathbf{BA}_{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{BC}\bullet\mathbf{BA}}{|\mathbf{BC}|^2}\,\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 0.59 \\ -2.35 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{BD}| = \sqrt{.59^2+2.35^2} = 2.42$

$\mathbf{OD} = \mathbf{OB}+\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.59 \\ -2.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.59 \\ 2.65 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} 4.59--2 \\ 2.65-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.59 \\ 1.65 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AD}| = \sqrt{6.59^2+1.65^2} = 6.79$

$\mathbf{AD} \perp \mathbf{BC}$? Ortogonaltest: $\mathbf{AD}\bullet\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 6.59 \\ 1.65 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 13.2 - 13.2 = 0$, JA!

Areal = $\frac{1}{2} * |\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC})| = \frac{1}{2} * \left|\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} * |-24-32| = 28$

Kontrol: Areal = ½ * højde * bredde = $\frac{1}{2} * |\mathbf{AD}| * |\mathbf{BC}| = \frac{1}{2} * 6.79 * 8.25 = 28.0$

Linie BC: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $8(x-4) + 2(y-5) = 0$

Linie AD: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s*\begin{pmatrix} 6.59 \\ 1.65 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1.65 \\ 6.59 \end{pmatrix}$, $-1.65(x+2) + 6.59(y-1) = 0$

Skæring BC og AD: solve(8(x-4) + 2(y-5)=0 and -1.65(x+2) + 6.59(y-1)=0,{x,y}) giver (x,y) = (4.59,2.65)

Afstand fra A til linien BC: $\frac{|8(-2-4) + 2(1-5)|}{\sqrt{8^2+2^2}} = 6.79$

Cirkel med centrum A og radius 7: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 49$, eller $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 44$

Skæring mellem cirklen og linien BC:

Solve (x^2 + 4x + y^2 – 2y = 44 and 8(x-4) + 2(y-5) = 0,{x,y}) giver (x,y) = (5,1) og (4.18,4.29)

Opgaver i 2D og 3D geometri

2D: Givet A(-1,3), B(5,6) og C(7,-4). 3D: Givet A(12,0,0), B(0,5,0) og C(0,0,8). AD er højde i trekant ABC.
Cirklen (kuglen) har centrum i origo O(0,0) og radius 6.
Opgave 1-9 både 2D og 3D. Opgave 10-20 kun 2D. Opgave 20-31 kun 3D.
Mærk trekanten op på papir, klip ud, og se om den passer i koordinatsystemet

01) Find vektorerne AB, AC og BC og deres længder.
02) Find de tre vinkler A, B og C.
03) Find koordinaterne for D
04) Find vektor AD og dens længde.
04) Find trekantens areal på to forskellige måder.
05) Er AD vinkelret på BC? Er AD vinkelret på AC?
06) Find ligningerne for linjerne BC og AD
07) Find skæringspunktet for linjerne BC og AD.
08) Find afstanden fra A til BC
09) Find skæringspunkterne mellem cirklen og linien BC.
10) Find midtnormalernes ligninger
11) Find midtnormalernes skæringspunkt
12) Find medianernes ligninger
13) Find medianernes skæringspunkt
14) Find højdernes ligninger
15) Find højdernes skæringspunkt
16) Find vinkelhalveringsliniernes ligninger
17) Find vinkelhalveringsliniernes skæringspunkt
18) Find ligningen for trekantens indskreven cirkel
19) Find ligningen for trekantens omskreven cirkel

20) Find ligningen for trekant ABC's plan.
21) Find afstanden fra O til trekantens plan.
22) Find ligningen for linien gennem O og vinkelret på trekantens plan.
23) Find skæringspunktet P mellem denne linie og trekantens plan
24) Find skæringspunktet P mellem denne linie og kuglen
25) Find vinklen mellem linierne OP og AB
26) Find vinklen mellem linien OP og x-y planen
27) Find vinklen mellem x-aksen og trekantens plan.
28) Find vinklen mellem x-y planen og trekantens plan.
29) Find vinklen mellem x-z planen og trekantens plan.
30) Find ligning for de to plan, som tangerer kuglen, og som er parallelle med trekantens plan.
31) Find ligningen for skæringen mellem kuglen og trekantens plan.

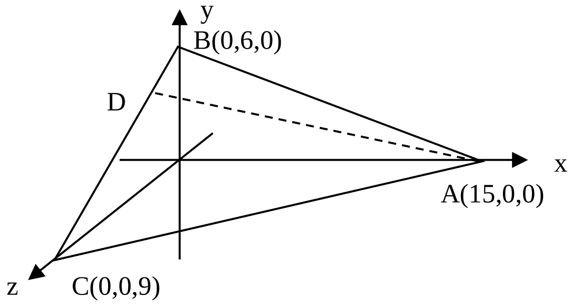
3D-geometri

Givet: A(15,0,0), B(0,6,0), C(0,0,9)

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0-15 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AB}| = \sqrt{15^2+6^2+0} = 16.2$

$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 0-15 \\ 0-0 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AC}| = \sqrt{15^2+0+9^2} = 17.5$

$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{BC}| = \sqrt{0+6^2+9^2} = 10.8$



A = cos-1$\left(\frac{\mathbf{AB}\bullet\mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}|\,|\mathbf{AC}|}\right)$ = 37.2, B = cos-1$\left(\frac{\mathbf{BA}\bullet\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}|\,|\mathbf{BC}|}\right)$ = 78.1, C = cos-1$\left(\frac{\mathbf{CA}\bullet\mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}|\,|\mathbf{CB}|}\right)$ = 64.7

$\mathbf{BD} = \mathbf{BA}_{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{BC}\bullet\mathbf{BA}}{|\mathbf{BC}|^{\wedge}2}\,\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.85 \\ 2.77 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{BD}| = \sqrt{0+1.85^2+2.77^2} = 3.33$

$\mathbf{OD} = \mathbf{OB}+\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1.85 \\ 2.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.15 \\ 2.77 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} 0-15 \\ 4.15-0 \\ 2.77-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 4.15 \\ 2.77 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AD}| = \sqrt{15^2+4.15^2+2.77^2} = 15.8$

AD ⊥ **BC** ? Ortogonaltest: **AD•BC** = 0-24.9+24.9 = 0, JA!

Areal = ½ * | **BC** x **BA** | = ½ * | crossp([0,-6,9],[15,-6,0]) | = ½ * | [54,135,90] | = ½ * $\sqrt{54^2+135^2+90^2}$ = 85.5

<u>Kontrol:</u> Areal = ½ * højde * bredde = ½ * | **AD** | * | **BC** | = ½ * 15.8 * 10.8 = 85.5

Linie BC: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, Linie AD: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s*\begin{pmatrix} -15 \\ 4.15 \\ 2.77 \end{pmatrix}$

Skæring BC og AD:	x = x y = y z = z	solve (0 = 15-15s and 6-6t = 4.15s and 9t = 2.77s, {x,y,z})	s = 1 t = 0.308	Ellers 'false' hvis der ikke er skæring (vindskæve linier)

Skæringsunkt. D: **OD** = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1*\begin{pmatrix} -15 \\ 4.15 \\ 2.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.15 \\ 2.77 \end{pmatrix}$. Afst. fra A til BC: $\frac{|\mathbf{BC} \times \mathbf{BA}|}{|\mathbf{BC}|} = \frac{171}{10.8}$ =15.8 = | **AD** |

Plan π gennem A(15,0,0) og ABC: **n** = **BC x BA** = $\begin{pmatrix} 54 \\ 135 \\ 90 \end{pmatrix} = 9*\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$; 6(x-15)+15(y-0)+10(z-0) = 0, 6x+15y+10z-90 = 0

Afstand fra O(0,0,0) til planen π: $\frac{|6x+15y+10z-90|}{\sqrt{6^2+15^2+10^2}} = \frac{|6*0+15*0+10*0-90|}{\sqrt{6^2+15^2+10^2}} = \frac{|0-90|}{\sqrt{6^2+15^2+10^2}}$ = 4.74

Linien gennem O og vinkelret på planen π: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

Skæring mellem linie og plan (indsæt linie i plan): Solve (6(6t) + 15(15t) + 10(10t) – 90 = 0) giver t = 0.249

Skæringspunkt P: **OP** = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.249*\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.49 \\ 3.74 \\ 2.49 \end{pmatrix}$, | **OP** | = $\sqrt{1.49^2+3.74^2+2.49^2}$ = 4.74

OP ⊥ **AB** ? Ortogonaltest: **OP•AB** = -22.5+22.5+0 = 0, JA!

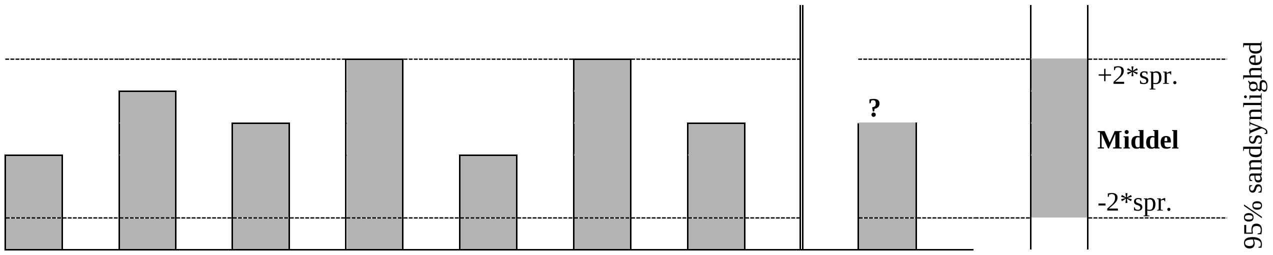
Vinkel mellem OP og xy-plan med normalvektor n = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: cos-1$\left(\frac{\mathbf{OP}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{OP}|\,|\mathbf{n}|}\right)$ = 58.3; vinkel = 90-58.3 = 31.7

Skæring mellem plan π og xy-plan gennem O(0,0,0) med ligning 0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) dvs. z = 0

Solve (6x + 15y + 10z – 90 = 0 and z = 0 and y = t, {x,y,z}) giver $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 2.5t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix} -2.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Statistik

Nogle tal er forudsigelige, andre uforudsigelige. Uforudsigelige tal kaldes tilfældige tal, random-tal eller stokastiske tal. Stokastiske tal kan dog som regel 'bagud-siges' ved at opstille en statistik over deres hidtidige adfærd. I tabellen opstilles de observerede tal samt hvor hyppigt de enkelte tal er forekommet.	Ordnes observationerne i voksende rækkefølge vil Median = den midterste observation, 1. (3.) kvartil = den midterste observation i 1. (2.) halvdel. Et histogram viser de enkelte observationers hyppigheder. En sumkurve viser den kumulerede frekvens, hvoraf median og kvartiler kan aflæses.



Statistik *Sandsynlighed*

Bagud-sige: Middeltal, spredning Forud-sige x = Middeltal ± 2·spredning

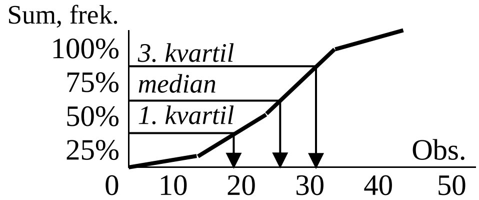
1. Observationer
x: 10, 12, 22, 12, 15, ...

2. Gruppere og optælle hyppighed

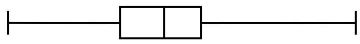
Observationer Hyppighed Frekvens Sum. frek.

x	h	p	∑p
0-10	3	3/40 = 0.075	0.075
10-20	12	0.300	0.375
20-30	18	0.450	0.825
30-50	7	0.175	1.000
Total	40	1.000	

Sumkurve



Et **Boksplot** indeholder median og kvartiler samt mindste og største observation.

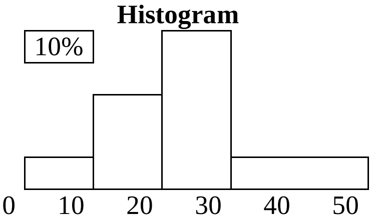


3. Middeltal eller gennemsnit: Hvis alle observationer var ens ... men de afviger

Observationer Hyppighed Frekvens Summ. frek. Middeltal

x	h	p	∑p	m = ∑xi·pi
0-10	3	3/40 = 0.075	0.075	5·0.075=0.375
10-20	12	0.300	0.375	4.5
20-30	18	0.450	0.825	11.25
30-50	7	0.175	1.000	7
Total	40	1.000		23.1

Histogram



4. Varians, spredning: Hvis alle afvigelser var ens ...

Observationer Hyppighed Frekvens Summ. frek. Middeltal Afvigelse Varians

x	h	p	∑p	m = ∑xi·pi	|xi - m|	v = ∑(xi-m)^2·pi
0-10	3	3/40 = 0.075	0.075	5·0.075=0.375	|5-23.1|=18.13	18.13^2·0.075=24.64
10-20	12	0.300	0.375	4.5	8.13	19.80
20-30	18	0.450	0.825	11.25	1.88	1.58
30-50	7	0.175	1.000	7	16.88	49.83
Total	40	1.000		23.1		s^2 = 95.86

Spredning s = √95.86 = 9.8

5. Forudsigelse: x = Middeltal ± 2·spredning =m ± 2·s = 23.1 ± 19.6 *Konfidens-interval* = [3.5 ; 42.7]

6. På en formelregner indtastes intervalmidtpunkter under STAT. Frekvens = hyp/sum(hyp). KumFrek = cumsum(frek).

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.
0	2	.05	.050
1	5	.125	.175
2	9	.225	.400
3	12	.300	.700
4	8	.200	.900
5	4	.100	1.000

Man kan nu beregne forskellige tal ved hjælp af 1-var statistik:
Middeltal, gennemsnit, m = 2.8
Spredning, s = 1.3
Konfidens-interval = m ± 2*s = [0.2;5.4]
1. kvartil = 2
Median = 3
3. kvartil = 4

Middeltal, gennemsnitstal, forventningstal: Hvis alle observationer var ens. Det er de ikke, de er spredt.
Spredning: Hvis alle spredninger var ens (i forhold til middeltallet).
Konfidens-interval: Omfatter ca. 95% af observationerne, kan bruges til at forudsige nye observationer med.

Sandsynlighedsregning

Gentages et spil med gevinstchance 25% 100 gange, vil der være størst sandsynlighed for at vinde de forventede 25 gange, men større sandsynlighed for at ramme lige ved siden af.	Sandsynlighedsregning forudsiger det uforudsigelige.

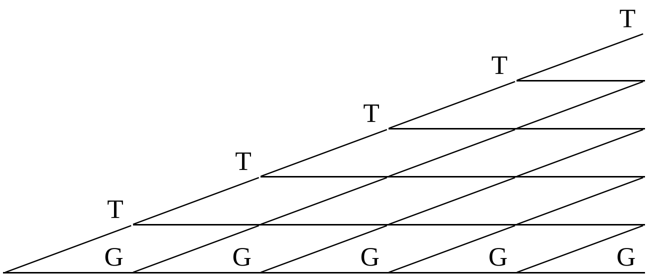
Eksempel1. Et spil med to udfald, Gevinst og Tab, gentages 5 gange. Teoretisk set har serien 6 mulige udfald, idet vi kan vinde 0, 1, 2, 3, 4, 5 gange. Der er kun 1 vej til at vinde 5 gange: GGGGG, der er 5 veje til at vinde 4 gange idet man kan tabe 1., 2., 3., 4. eller 5. gang: TGGGG, GTGGG, GGTGG, GGGTG, GGGGT.
Hvor mange veje er der til at få Gevinst 3 gange? Vi kan tælle efter eller forudsige resultatet:

Antal veje til 3 G ud af 5mulige = nCr(5,3) = 10 (nCr findes under Catalog).

De 6 udfald er lige mulige, men ikke lige sandsynlige. Den fordeling som fremkommer ved at gentage et 2-udfalds eksperiment mange gange kaldes en binomial-fordeling. Hvis gevinst-chancen p er 50% = 0.5, så er:

Sandsynligheden for at vinde netop 3 gange af 5: p(x=3) = BinomCdf(5,0.5,3,3) = 0.313 = 31.3%.
Sandsynligheden for at vinde 2, 3 eller 4 gange af 5: p(2≤x≤4) = BinomCdf(5,0.5,2,4) = 0.718 = 71.8%

Der kan nu opstilles en statistik over de forskellige samlede udfald, og af denne kan middelværdi og spredning beregnes. Disse tal kan dog forudsiges af formlerne m = n*p og s = √(n*p*(1-p)), hvor n er antal gentagelser og p er gevinstchancen.



x	nCr	Cdf
0 G	1	0.031
1 G	5	0.156
2 G	10	0.313
3 G	10	0.313
4 G	5	0.156
5 G	1	0.031

Eksempel2. Ved 30 gentagelser af et spil med gevinstchance 2/3 er middeltallet m= n*p = 30*2/3 = 20.
Spredningen er s = √(n*p*(1-p)) = √(20*1/3) = 2.6. Konfidens-intervallet er da 20±2*2.6 = [14.8;25.2].
Der er altså ca. 95% chance for at der i næste spille-forløb vil være mellem 15 og 25 gevinstgange.
Hvis man kun vinder f.eks. 12 gange må man forkaste en evt. hypotese om at gevinstchancen er 2/3.

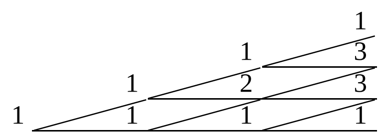
Normalfordeling

Gentages spillet mange gange, vil binomialfordelingen begynde at nærme sig til normalfordelingen, som ofte forekommer i naturen, hvor der som regel vil være en vis variation af f.eks. dyrs højde. I sådanne tilfælde kan den stokastiske variable x antage decimalværdier, evt. også negative værdier.

Eksempel3. Ved 20.000 gentagelser af et spil med 60% gevinstchance er middelværdi m = n*p = 20000*0.60 = 12000, og spredning s = √(n*p*(1-p)) = √(12000*0.40) = 69.3.
Binomialfordeling: P(0<x<12123) = BinomCdf(20000,0.60,0,12122) = 0.962 = 96.2%
Normalfordeling: P(0<x<12123) = NormCdf(0,12123,12000,69.3) = 0.962 = 96.2%

En normalfordeling vil have en retlinet sumkurve på et normalfordelingspapir.

Opgaver

1. Udfør eksperimentet ovenfor 40 gange som '5*rand()'. Lav statistik. 2. I eksperimentet ovenfor find hyppighederne ved '9*rand()' 3. I eksperimentet ovenfor find hyppighederne ved nCr(5,0), nCr(5,1), nCr(5,2) osv. 4. Udfør de ovenstående beregninger. 5. Beskriv eksempel 1 med p = 30%? 6. Beskriv eksempel 1 med 6 gentagelser. 7. Beskriv eksempel 1 med 8 gentagelser. 8. 'when(rand()<0.7,1,0)' er et eksperiment med p = 0.7. Sammenlagt med sig selv 5 gange svarer det til at udføre eksperimentet i eksempel 1. Udfør det 32 gange og lav statistik på resultatet. 9. Beskriv eksempel 1 med 200 gentagelser og forskellige p-tal. Sammenlign svar fra binomial- og normalfordeling.	10. En populations vægttal er normalfordelt med middelværdi 13.2 og spredning 2.4. Hvad er sandsynligheden for højst 12.6? mindst 13.5? mellem 13.0 og 14.0? 11. En populations højdetal er normalfordelt med middelværdi 132 og spredning 24. Hvad er sandsynligheden for højst 126? mindst 135? mellem 130 og 140? 12. Opstil nCr-tallene systematisk i ovenstående trekant ved at udbygge nedenstående trekant. Der fremkommer så en trekant med navnet Pascals trekant. Hvilke egenskaber har denne trekant? Hvem var Pascal? 

To ligninger med to ubekendte, tre ditto

To ligninger med to ubekendte kan løses almindeligt, grafisk eller med matricer	b kr + 5kg á a kr/kg = 25 b kr + 8kg á a kr/kg = 34	x + 5*y = 25 x + 8*y = 34	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

2 ligninger med 2 ubekendte: Formlen b kr + 5kg á a kr/kg = 25 indeholder 2 ubekendte og kan derfor ikke løses, men mindre vi kender et andet eksempel på samme formel, f.eks. b kr + 8kg á a kr/kg = 34.

Opskrevet som ligningssystem	Opskrevet som matrix-ligning
x + 5*y = 25 x + 8*y = 34	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

Almindelig løsning findes ved hjælp af solve: 'solve **(**x + 5*y = 25 and x + 8*y = 34, {x,y}) giver x = 10 og y = 3.

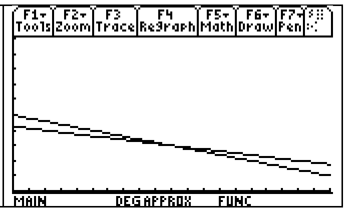
Eller ved parallelregning:

x + 5*y = 25		x + 8*y = 34
x = 25 – 5*y	→	25 – 5*y + 8*y = 34
		3*y = 34 – 25 = 9
x = 25 – 5*3 = 10	←	y = 9/3 = 3

Grafisk løsning findes ved at isolere y af ligningerne og indsatse dem i y- editoren.

'Solve(x + 5*y = 25, y)' giver 'y = (25-x)/5' , og 'Solve(x + 8*y = 34, y)' giver 'y = (34-x)/8'

Skæringspunktet kan bestemmes med 'graph, F5, Intersection' til x = 10 og y = 3.



Matrix-løsning findes ved at indtaste de to matricer i matrix-editoren som mv2 og mh2:

$\underline{V}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ = ?	$\underline{mv2}$ * $\underline{V}$ = $\underline{mh2}$
$\underline{mv2}=\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}$ $\underline{mh2}=\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$	$\underline{V}$ = $\underline{mv2}$^-1 * $\underline{mv2}$ $\underline{V}=\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}$ ^-1 * $\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$ $\underline{V}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$
Test	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

$\underline{V}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ = ?	$\underline{mv3}$ * $\underline{V}$ = $\underline{mh3}$
$\underline{mv3}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}$ $\underline{mh3}=\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$	$\underline{V}$ = $\underline{mv3}$^-1 * $\underline{mv3}$ $\underline{V}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}$ ^-1 * $\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$ $\underline{V}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
Test	$\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$

Alternativt indtastes blot 'simult([1,5;1,8],[25;34])'

3 ligninger med 3 ubekendte, 4 med 4 osv. kan ikke løses grafisk, kun som almindelig løsning eller matrix-løsning:

Opskrevet som ligningssystem	Opskrevet som matrix-ligning
3*x + 5*y + 2*z = 19 x – z = -2 4*x – 3*y + 6*z = 16	$\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\-2\\16\end{pmatrix}$

En matrix-løsning findes ved at indtaste de to matricer i matrix-editoren som mv3 og mh3. Ligningssystemer til træning kan fremstilles af tallene fra f.eks. 'randMat(3,3)' og 'randMat(3,1).

Opgaver. Løs ligningssystemerne

1. 4x - 1*y = -9 4x - 4*y = 0 2. 4x + 2*y = 16 5x - 3*y = -2 3. 7x + 4*y = -1 -3x + 2*y = 19 4. 2x - 5*y = 16 3x - 4*y = 17	5. -7*x - 3*y - 7*z = 3 -1*x - 5*y + 1*z = -13 9*y - 5*z = 36 6. 4*x + 3*y + 7*z = 81 5*x + 3*y + 1*z = 54 2*x + 9*y + 5*z = 57 7. 2*x + 3*y - 1*z = - 6 5*x + 3*y - 4*z = -15 2*x – 2*y + 5*z = 40	8. 2*x + 5*y - 1*z + 9t = 118 1*x + 1*y - 9*z - 5t = -88 - 3*y + 7*z + 5t = -51 -3*x + 5*y + 2*z - 5t = -10 9. -6*x - 1*y + 8*z + 8t = 129 -2*x + 2*y - 5*z + 7t = 60 8*x + 6*y + 3*z + 3t = -40 -7*x - 4*y - 8*z - 4t = 12

Den kvantitative litteratur: Matematiske modeller

Den klassiske kvantitative litteratur er geometri og algebra. Hertil kommer den moderne kvantitative litteratur, skabt af spørgsmål, som kommer fra produktionen: Hvordan hentes sølv og kul op fra minegangene? Hvordan navigeres på havet? Hvordan bygges maskiner? Hvordan optimeres en produktion? Hvordan optimeres profitten? Osv.
Der regnes på, hvordan sølvmalm og vand løftes op af minerne, og hvordan sølvmalm forvandles til sølv af forskellig renhedsgrad. Sølvet begiver sig nu på rejse ned ad de tyske floder til Italien, hvorfra købmænd er kommet for at bytte klæde og vin med sølv. Undervejs passeres adskillige borge beliggende på høje bjerge. Købmændene må aflevere sølv som told- og beskyttelsesafgifter, men vinder det tilbage igen gennem spil. Fra Italien rejser sølvet videre når købmændene bytter det med Østens efterspurgte varer, krydderi og silke, enten via den dyre vej over land transporteret af karavaner, eller via den billige vej over hav transporteret af arabiske købmænd i Egypten. Så Italiens rigdomme hober sig op først gennem handel og senere gennem bankudlån. I banken får man brug for at kunne lægge renter sammen og udvikler derfor potensregningen og opdager herved rentes-renten: 7 år á 6% = 42% rente + 8% rentes-rente = 50% da 106%^7 = 150%.
En stor del af fortjenesten går til forbrug af prægtige paladser overalt i Renæssancens Italien, og til ansættelse af kunstnere og filosoffer. Italien bliver udkonkurreret af Portugal, som kan nedsætte prisen på peber til 1/3 ved at overspringe mellemhandlerne og selv at hente Østens varer hjem over havet på egne skibe som sejler rundt om Afrika. Spanien forsøger at finde en anden vej til Indien ved at sejle mod vest. Men i Vest-Indien er der hverken krydderi eller silke, derimod rigeligt med sølv og guld. Paven deler den nye verden mellem Spanien og Portugal. Portugal får alt øst for den 60. længdegrad, Spanien alt vest for. I Spanien og Portugal går fortjenesten til forbrug af kirker, klostre, palæer og hære.
I England går fortjenesten til investering til at køb af aktier og etablering af industriel produktion.

De tre genrer: Fakta, fiktion og fidus
Både kvalitativ og kvantitativ litteratur kan opdeles i tre genrer: Fakta, fiktion og fidus.
Eksempler på de tre kvalitative genrer er
Fakta: 'DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger København lavt'
Fiktion: 'HVIS København lå i alperne, SÅ lå København højt'.
Fidus: 'HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt.'

Fakta
Fakta er 'DaSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige:
'DA prisen er 4 kr./kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr.'.
DaSå beregninger kunne også kaldes FritFalds-beregninger:
'DA accelerationen er 9.8 m/s^2, SÅ vil hastighedstilvæksten på 5 sekunder være 5*9.8 = 49 m/s'.
Eller Rum-beregninger:
'DA rummet har dimensionerne 3mx4mx5m, SÅ er rumfanget V = 3mx4mx5m = 60 m^3'.
Fakta-beregninger kontrolberegnes:
T = 3 kg. á 4 kr./kg. = 3*4 kr. = 15 kr., hov regnefejl, T = 12 kr.
Et eksempel er regnefejlen som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm + 3 tommer = 5 cm

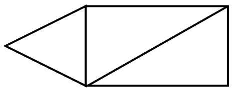
Fiktion
Fiktion er 'HvisSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige:
'HVIS indkomsten er 4 mio$/år, SÅ vil 6 års indkomst være 6*4 = 24 mio$'.
HvisSå beregninger kunne også kaldes Affalds-beregninger:
'HVIS affaldsmængden er 9.8 kg/dag, SÅ vil arbejdsugens affald være 5*9.8 = 49 kg'.
Eller Rate-beregninger:
'HVIS vækstraten er 3% pr. år, SÅ vil den samlede vækstrate efter 5 år være 15.9%, da 103%^5 = 115,9%'.
Fiktions-beregninger scenarieberegnes:
Indkomsten skønnes at ville ligge mellem 4kr./dag og 5kr./dag, så 3 dages indkomst vil ligge mellem 12 kr. og 15 kr., da T = 3 dage á 4 kr./dag = 3*4 = 12 kr., og T = 3 dage á 5 kr./dag = 3*5 = 15 kr.

Fidus
Fidus er 'HvadSå' beregninger, som kvantificerer ikke-kvantificerbare kvaliteter:
'HVIS konsekvensen K = 'brækket ben' sættes til 2 mio.$, og HVIS sandsynligheden S sættes til 30%, SÅ vil risikoen være R = K*S = 2*0.3 = 0.6 mio.$. Og HVADSÅ? Hvem siger at et brækket ben koster 2 mio. kr.? Og hvem siger at sandsynligheden for at brække et ben overhovedet kan måles?'
HvadSå beregninger kunne også kaldes Dødsfalds-beregninger:
'HVIS omkostningen ved en gravplads er 10 kr./dag, og omkostningen ved en hospitalsplads er 10.000 kr./dag, SÅ er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVADSÅ, betyder det at hastighedsgrænsen så skal sættes op til 200 km/time for at spare penge?'
Eller Risiko-beregninger:
'HVIS vi kan øge sandsynligheden for dødsfald og mindske sandsynligheden for kvæstelse, SÅ vil risikoen ved skolevejen kunne nedsættes. Og HVADSÅ? Betyder det at vi skal nedlægge fodgængerfeltet?'
Fidus-beregninger afvises og henvises fra kvantitativ ital-sættelse i talsproget til kvalitativ itale-sættelse i talesproget.

Opgavetyper

På græsk betyder matematik viden, der kan forudsige. Matematik = tal-forudsigelse med formler (A1).

Formelsamling vigtig: **Formler Forudsiger**



Matematik = Geometri (jordmåling på græsk) + Algebra (genforening på arabisk)

Geometri: Alle former kan opdeles i trekanter, og disse i retvinklede trekanter (sin, cos, tan)

Arabertal: 345 = 3*10^2 + 4*10 + 5 et polynomium (mange-led) (A6). 2 led:3+4, 2 faktorer: 3*4

Fire måder at forene tal på A2 (A-kompendium side 2):

Totalen T opsamler	**Variable**	**Konstante**
Styk-tal (m, s, kg, kr)	T = a+b	T = a*b
Per-tal (m/s, kr/kg, m/100m = %)	ΔT = ∫f(x)dx	T = a^b

Plus forudsiger sammentælling, gange gentaget plusning, potens gentaget gangning, integration areal.

Formel: En kombination af konstante og variable tal og regnearter beregner en størrelse y, y = f(x).

Formel med 1 ubekendt = en ligning, som løses i hovedet, grafisk eller algebraisk.

Formel med 2 ubekendte = en funktion, som grafes.

Formelskema(A3):

Fremad-regning:

T = ?	T = a+b*c^d
a = 2	T = 2+3*4^5
b = 3	T = 2+3*1024
c = 4	T = 2+3072
d = 5	T = 3074

<u>Talformlen giver</u>	<u>Grundformlerne:</u>
T = a*x og T = b + a*x	Lineær vækst
T = b*a^x og T = b*x^a	Exp. & potens vækst
T = a*x^2 + b*x + c	Polynomium

Tilbage-regning:

- med grafer (2 ubekendte)   T = 2+3*4^x
- med ligninger (1 ubekendt)   12 = 2+3*x^5

2. Tilbage-regning med ligninger (flyt over med modsat regnetegn) (A3, 25)

x+5 = 20	**x*5 = 20**	**x^5 = 20**	**5*x = 20**	**∫ y dx = x^2 + 4x + 2**
x= 20-5 = 15	x = $\frac{20}{5}$ = 4	x = 20^($\frac{1}{5}$) = 1.82	x= log5(20) =1.86	y = (x^2 + 4x + 2)’ = 2x + 4
VS = HS 15+5 = 20 20 = 20 Da VS= HS, OK	VS = HS 4*5 = 20 20 = 20 Da VS = HS, OK	VS = HS 1.82^5 = 20 20.0 = 20 Da VS = HS, OK	VS = HS 5^1.86 = 20 20.0 = 20 Da VS = HS, OK	VS = HS ∫ (2x + 4)dx = x^2 + 4x +2 2x^2/2+4x +k = x^2 + 4x +2 Da VS = HS, OK med k = 2

Ligningsløsning:

x = ?	12 = 2+3*x^5
Y1 = VS = 12 Y2 = HS = 2+3*x^5	Solve Y1(x) = Y2(x) Intersect Y1(x) = Y2(x) Eller hovedregning med overflytning eller neutralisering **Giver x = (10/3)^(1/5)** **Giver x = 1,27**
Test	VS = HS 12 = 2+3*1.27^5 12 = 11,9 Da VS = HS stemmer testen

3. Vækstopgaver opstilles som tabeller (A4)

Tabel	Lineær vækst	Eksponentiel vækst	Potentiel vækst
x y 2 5 6 7 9 ? ? 12	**y = b + a*x**	**y = b * a^x**	**y = b * x^a**
	5 = b + a*2 7 = b + a*6	5 = b * a^2 7 = b * a^6	5 = b * 2^a 7 = b * 6^a
	7-5 = a*(6-2) a = $\frac{2}{4}$ = 0.5 b = 5 – 0.5*2 = 4 **y = 0.5*x + 4**	7/5 = a^(6-2) a = ($\frac{7}{5}$) ^ $\frac{1}{4}$ = 1.088 b = 5/1.088^2 = 4.226 **y = 4.226*1.088^x**	7/5 = (6/2)^a a = log3($\frac{7}{5}$) = 0.306 b = 5/2^0.306 = 4.044 **y = 4.044*x^0.306**
	y = 0.5*9 + 4 = **8.5** 12 = 0.5*x + 4 x = $\frac{12-4}{0.5}$ = **16**	y = 4.226*1.088^9 = **9.01** 12 = 4.226*1.088^x x = log1.088(12/4.226) x = **12.4**	y = 4.044*9^0.306 = **7.93** 12 = 4.044*x^0.306 x = ($\frac{12}{4.044}$) ^ $\frac{1}{0.306}$ = **34.9**

Alternativ: regression eller løsning af 2 ligninger med 2 ubekendte: solve (5 = b + a*2 and 7 = b + a*6, {a,b})

Find fordoblingskonstanten ved en årlig vækst på 3.2%

T = ?	T = $\frac{\ln 2}{\ln a}$
a = 1+r = 1+0.032 = 1.032	T = $\frac{\ln 2}{\ln 1.032}$ = 22.0

Find den 10årlige vækstprocent med en årlig vækstprocent på 3.2%

ry = ?	1 + ry = (1 + rx)^a
rx = 0.032 a = 10	1 + ry = (1 + 0.032)^10 ry = 0.37 = 37% = 10*3.2% + 5.0% = simpel rente + rentes rente

4. Retvinklede trekanter, Pythagoras

a = ?	c^2 = a^2 + b^2
c =15 b= 12 Y1 = VS, Y2 = HS	15^2 = x^2 + 12^2 Solve Y1(x) = Y2(x) Giver x = 9, Test

A = ?	sinA = $\frac{a}{c}$
a = 10 c = 20 Y1 = VS Y2 = HS	sinA = $\frac{10}{20}$ Solve Y1(x) = Y2(x) | x>0 and x<180 Giver x = 30,150, Test

5. Vilkårlig trekant, cosinus-realtion (A8, 26)

C = ?	c^2 = a^2 +b^2 – 2*a*b cosC
a = 10, b = 20, c = 25 Y1 = VS Y2 = HS	25^2 = 10^2 + 20^2 – 2*10*20*cosC Solve Y1(x) = Y2(x) | x>0 and x<180 Giver x = 108, Test

Sinus-relationer, A = ?	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
a = 5 b = 10 B = 20 Y1 = VS, Y2 = HS	$\frac{5}{\sin A} = \frac{10}{\sin 20}$ Solve Y1(x) = Y2(x) | x>0 and x<180 Giver x = 9.85, Test

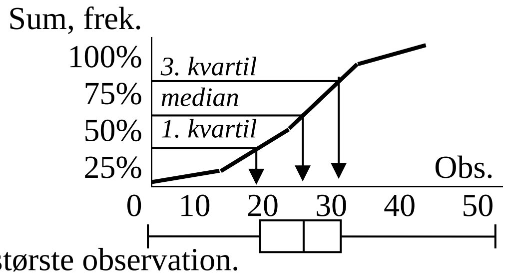
6. Statistik: Bagud-sigelse af uforud-sigelige tal (A10, 26)

A. Gruppere og optælle hyppighed

Observationer Hyppighed Frekvens Sum. frek.

Sumkurve

x	h	p	∑p
0-10	3	3/40 = 0.075	0.075
10-20	12	0.300	0.375
20-30	18	0.450	0.825
30-50	7	0.175	1.000
Total	40	1.000	



Et **Boksplot** indeholder median og kvartiler samt mindste og største observation.

B. Middeltal eller gennemsnit: Hvis alle observationer var ens ... men de afviger

C. Varians, spredning: Hvis alle afvigelser var ens ...

Observ. Hyppigh Frekvens SumF. Middeltal Afvigelse Varians

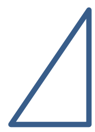
x	h	p	∑p	m = ∑xi·pi	|xi - m|	v = ∑(xi-m)^2·pi
0-10	3	3/40 = 0.075	0.075	5·0.075=0.375	|5-23.1|=18.13	18.13^2·0.075=24.64
10-20	12	0.300	0.375	4.5	8.13	19.80
20-30	18	0.450	0.825	11.25	1.88	1.58
30-50	7	0.175	1.000	7	16.88	49.83
Total	40	1.000		23.1		s^2 = 95.86

Spredning s = √95.86 = 9.8

D. Forudsigelse: x = Middeltal ± 2·spredning =m ± 2·s = 23.1 ± 19.6 *Konfidens-int.* = [3.5 ; 42.7]

7. Differentialregning, hældnings-regning (A5, 27, 28, 32, 33)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \,|\Delta x \to 0$$



Beskriv monotonien for formlen y = f(x) = 0.5x^3-3x^2+2x+3

0.37 3.63 → x

↗ ↘ ↗

\+ 0 – 0 +

y = 0.5x^3-3x^2+2x+3

y' = 1.5x^2-6x+2 = 0 for x = 0.37 og 3.63

Monotoni: y vokser: x < 0.37, x > 3.63, og y aftager: 0.37 < x < 6.33

Test: Solve(d(y1(x),x) > 0,x) giver x < 0.37, x > 3.63

Solve(d(y1(x),x) < 0,x) giver 0.37 < x < 6.33

Find ligningen for tangenten til kurven f(x) = x^2 + 4x + 5 i punktet, hvor x = 3

y = ?	y = b + a*x
f(x) = x^2 + 4x + 5 f(3) = 3^2 + 4*3 + 5 =26 f'(x) = 2*x + 4 f'(3) = 2*3+4 = 10 = a	26 = b + 10*3 26 – 30 = b = -4 y = -4 + 10x

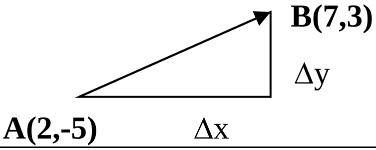
8. Integralregning: areal-regning med fortegn (arealet under per-tals-kurven giver totalen) (A5, 29, 30, 32, 33)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dF(x)\,dx = \Delta_a^b F = F(b) - F(a), \quad \text{hvor } \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x) \text{, dvs. F er en stamfu. til f}$$

$$A = \int_2^5 0.6x^2\,dx = [0.2*x^3]_2^5 = (0.2*5^3) - (0.2*2^3) = 25 - 1.6 = 23.4$$

9. 2D Vektorer (A10)

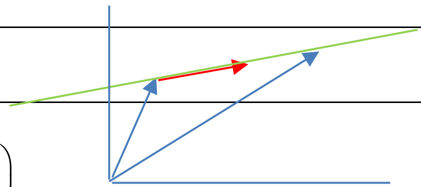
Find vektor AB mellem A(2,-5) og B(7,3) *en vektor fra A til B = en rejse fra A til B*

AB = ?	**AB** = $\begin{pmatrix} Dx \\ Dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 - x1 \\ y2 - y1 \end{pmatrix}$ 
Δx = slut – beg = 7 – 2 = 5 Δy = 3-(-5) = 8	**AB** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, Test ved tegning

Find en enheds-vektor og hældnings-vektor og tværvektor for vektor **AB** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

e = ?, **h** = ?	**e** = $\frac{1}{\lvert \mathbf{AB} \rvert}$ * **AB**, **h** = $\begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y/ \Delta x \end{pmatrix}$, Hvis **a** = $\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$ så **â** = $\begin{pmatrix} -b1 \\ a1 \end{pmatrix}$
$\lvert$ **AB** $\rvert$ = √(5^2+8^2) = √89 = 9.43 Hældning $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{5}$ Tværvektor, normalvektor, vækvektor	**e** = $\frac{1}{9.43} * \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9.43 \\ 8/9.43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.848 \end{pmatrix}$ **h** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.6 \end{pmatrix}$ a = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, â = $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ *Gratis at gå ned, koster fortegn at gå op*

Find vektorligningen for linien gennem A(2,-5) og B(7,3)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = = ?	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix}$ 
$\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix}$ = **AB** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5t \\ -5 + 8t \end{pmatrix}$

Find vinklen mellem vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

v = ?	**a·b** = $\lvert$ **a** $\rvert$ * $\lvert$ **b** $\rvert$ *cosv *Gange lige over*
a = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ b = $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ Y1 = VS Y2 = HS	$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \left\lvert \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rvert * \left\lvert \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rvert$ *cosv 20-24 = √89*√25*cosv Solve Y1(x) = Y2(x) |x>0 and x<180 Giver v = 94.9

For hvilke t er vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ ortogonale?

t = ?	**a·b** = 0
a = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ b = $\begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ Y1 = VS Y2 = HS	$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ =0 20-8t = 0 Solve Y1(x) = Y2(x) Giver v = 2.5

Find projektionen af vektor **b** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ på vektor **a** = $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b_a}$= ?	$\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a \cdot b}}{\lvert \mathbf{a} \rvert \text{^}2} * \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e_a})*\mathbf{e_a}$
$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\lvert \mathbf{a} \rvert = \sqrt{}4\text{^}2 + (-3)\text{^}2 = \sqrt{}25$	$\mathbf{b_a} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{}25\text{^}2} * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b_a} = \frac{-4}{25} * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/25 \\ 12/25 \end{pmatrix}$

For hvilke t er vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ parallelle?

t = ?	Det(**a,b**) = 0
$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ Y1 = VS, Y2 = HS	$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & t \end{vmatrix} = 0$ 5t - 32 = 0 *Gange på tværs, gratis at gå ned, koster fortegn at gå op* Solve Y1(x) = Y2(x) Giver t = 6.4

Find arealet af trekanten udspændt af vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

A = ?	A = ½* $\lvert$ Det(**a,b**) $\rvert$
$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$	A = ½* $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$ ½ $\lvert$ -15 - 32 $\rvert$ = 23.5

Find normal-form og vektor-form for linjen gennem A(2,-5) og B(7,3)

Normal-form, bruges til at finde skæringspunkter med

N = ?	a*(x – xo) + b*(y-yo) = 0 da $\mathbf{n} \cdot \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Dx \\ Dy \end{pmatrix} = 0$
xo = 2 yo =- 5 $\mathbf{a} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \mathbf{\hat{a}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$	(-8)*(x – 2) + 5*(y-(-5)) = 0 -8x + 5y + 41 = 0 Test: Tegn og kontroller skæringspunkt med y-akse og hældning

Find afstanden fra punktet A(5,2) til linjen 3x-4y+5=0

Dist(P,l) = ?	Dist(P,l) = $\frac{\lvert ax1+by1+c \rvert}{\sqrt{}(a\text{^}2+b\text{^}2)}$
X1 = 5 y1 = 2 l: 3x-4y+5 = 0	Dist(P,l) = $\frac{\lvert 3*5 + (-4)*2 + 5 \rvert}{\sqrt{}(3\text{^}2+(-4)\text{^}2)} = \frac{12}{5} = 2.4$

Find centrum og radius i cirklen x^2 – 4*x + y^2 + 6*y = 23, A7

(x – xo)^2	+ (y – yo)^2	= r^2
x^2 – 2xo*x x^2 – 4*x	+ y^2 - 2yo*y + y^2 + 6*y	= r^2 – xo^2 – yo^2 = 23
-2xo = -4 xo = -4/-2 = 2	-2yo = 6 yo = 6/-2 = -3	23 = r^2 – 4 – 9 r^2 = 23 + 13 = 36 = 6^2

Løsning: Centrum i (x,y) = (2,-3) og radius = 6

Lav selv cirkler: Centrum (2,1) og radius 4. Expand (x-2)^2+(y-1)^2-16 giver x^2-4x+y^2-2y-11 .

10. 3D Vektorer (A11)

Find vektor AB mellem A(2,-5,4) og B(7,3,-2)

AB = ?	**AB** = $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$
$\Delta x = 7-2 = 5$ $\Delta y = 3-(-5) = 8$ $\Delta z = (-2)- 4 = -6$	**AB** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Find en enheds-vektor for vektor **AB** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

e = ?	**e** = $\dfrac{1}{\lvert \mathbf{AB} \rvert}$ * **AB**
$\lvert \mathbf{AB} \rvert = \sqrt{(5^2+8^2+(-6)^2)}$ $= \sqrt{125} = 11.2$	**e** = $\dfrac{1}{11.2} * \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/11.2 \\ 8/11.2 \\ -6/11.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0.716 \\ 0.537 \end{pmatrix}$, Test paralleltjek

Find vektorligningen for linien gennem A(2,-5,4) og B(7,3,-2)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xo \\ yo \\ zo \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} xo \\ yo \\ zo \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{pmatrix} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5t \\ -5 + 8t \\ 4 - 6t \end{pmatrix}$

Find vinklen mellem vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

v = ?	$\mathbf{a \cdot b} = \lvert \mathbf{a} \rvert * \lvert \mathbf{b} \rvert * \cos v$
a = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ b = $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Y1 = VS Y2 = HS	$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\lvert \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rvert * \left\lvert \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert * \cos v$ $20 – 24 – 12 = \sqrt{125} * \sqrt{29} * \cos v$ Solve Y1(x) = Y2(x) |x>0 and x<180 Giver v = 93.8

For hvilke t er vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ t \end{pmatrix}$ ortogonale?

t = ?	$\mathbf{a \cdot b} = 0$
a = $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ t \end{pmatrix}$ Y1 = VS Y2 = HS	$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ t \end{pmatrix} = 0$ $20 – 24 – 6t = 0$ Solve Y1(x) = Y2(x) Giver t = -2/3

Find projektionen af vektor **b** = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$ på vektor **a** = $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\mathbf{b_a}$= ?	$\mathbf{b_a} = \dfrac{\mathbf{a\cdot b}}{\lvert \mathbf{a} \rvert \text{^}2} * \mathbf{a} = (\mathbf{b}\cdot \mathbf{e_a})*\mathbf{e_a}$
b = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$ a = $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\lvert \mathbf{a} \rvert$ = √4^2+(-3)^2+2^2 = √29	$\mathbf{b_a} = \dfrac{\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\text{^}2} * \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\mathbf{b_a} = \dfrac{-16}{29} * \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-64/29\\48/29\\-32/29\end{pmatrix}$

Er vektorerne $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ parallelle?

a x b = ?	**a x b** = **0** hvis **a** og **b** er parallelle.
a = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$ **b** = $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\8\\-6\\5\\8\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\\4\\-3\\2\end{pmatrix}$, **a** x **b** = $\begin{pmatrix}8*2-(-6)*(-3)\\(-6)*4-5*2\\5*(-3)-8*4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-34\\-47\end{pmatrix}$, dvs. ikke parallelle
Alternativ	**a** x **b** = CrossP([5,8,-6],[4,-3,2])

Find arealet af trekanten udspændt af vektorerne $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$

A = ?	A = ½* $\lvert$ **(a x b)** $\rvert$
a = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$, **b** = $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$	A = ½* $\lvert$ √((-2)^2 + (-34)^2 + (-47)^2) $\rvert$ A = ½ * 58.0 = 29.0

Find normalform og for planen gennem A(2,-5, 4) med normalvektor **n** = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$

N = ?	a(x – xo) + b(y-yo) + c(z-zo) = 0 da **n** · **AX** = $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}$ = 0
xo = 2, yo =- 5 , zo = 4 **n** = $\begin{pmatrix}5\\8\\-6\end{pmatrix}$	5*(x – 2) + 8*(y-(-5)) + (-6)*(z – 4) = 0 5x + 8y – 6z – 26 = 0

Find afstanden fra punktet A(5,2,-3) til planen 3x+8y-6z-26=0

Dist(P,l) = ?	Dist(P,l) = $\dfrac{\lvert ax1+by1+cz1+d \rvert}{\sqrt{(a\text{^}2+b\text{^}2+c\text{^}2)}}$
X1 = 5 y1 = 2 z1 = -3 l: 3x+8y-6z-26 = 0	Dist(P,l) = $\dfrac{\lvert 3*5 + 8*2 - 6*(-3) - 26 \rvert}{\sqrt{(3\text{^}2+8\text{^}2+(-6)\text{^}2)}} = \dfrac{23}{10.4}$ = 2.20

Find centrum og radius i cirklen x^2 – 4*x + y^2 + 6*y + z^2 – 8*z = 20, (A7)

(x – xo)^2	+ (y – yo)^2	+ (z – zo)^2	= r^2
x^2 – 2xo*x x^2 – 4*x	+ y^2 - 2yo*y + y^2 + 6*y	+ z^2 – 2zo*z + z^2 – 8*z	= r^2 – xo^2 – yo^2 – zo^2 = 20
-2xo = -4 xo = -4/-2 = 2	-2yo = 6 yo = 6/-2 = -3	-2zo = -8 zo = -8/-2 = 4	20 = r^2 – 4 – 9 – 16 r^2 = 20 + 29 = 49 = 7^2

Løsning: Centrum i (x,y,z) = (2,-3,4) og radius = 7. Lav selv kugler: Centrum (2,1,-5) og radius 4.

Expand (x-2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2-16 giver x^2-4x+y^2-2y+z^210z+14

15. Differential-ligninger (A7, 31)

$A = \int_2^5 0.6x^2\,dx$ kan omskrives til en differential-ligning A'= 0.6 x^2 og $\Delta_2^5 A$ = A(5) – A(2) = ?

$\Delta_2^5 A$ = ?	A' = 0.6 x^2
	A = 0.2 x^3 + k A(5) = 0.2*5^3 + k = 25 + k A(2) = 0.2*2^3 + k = 1.4 + k A(5) – A(2) = 23.4

En diff.-ligning fortæller, hvad en formel er differentieret. Opgaven er at finde formlen udifferentieret.

1) y og x er separeret: Integration

y = ?	$\frac{dy}{dx} = 2x$	y(0) = 6
	∫dy = ∫2xdx y = x^2 + k y = x^2 + 6	6 = 0+k k = 6
Test Da VS = HS er y en løsning	VS = HS (x^2 + 6)' = 2x 2x = 2x	VS = HS 0^2 + 6 = 6 6 = 6

2) y og x kan separeres: Integration

y = ?	$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{y}$	y(0) = 6
	∫ydy = ∫6xdx ½y^2 = 3x^2 +k y = √(6x^2 + 2k) y = √(6x^2 + 36)	6 = √0+2k k = 18
Test Da VS = HS er y en løsning	VS = HS (√(6x^2 + 36))' = $\frac{6x}{y}$ $\frac{6x}{√(6x^2 + 36)} = \frac{6x}{√(6x^2 + 36)}$	VS = HS √(6*0^2 + 36)= 6 6 = 6

3) Med formelregner bruges 'F3 desolver'

y = ?	$\frac{dy}{dx} = 2 – 3y$	y(0) = 8
	Desolve (y' = 2-3y and y(0) = 8, x,y) giver y = 2/3 + 22/3e^(-3x)	
Test Da VS = HS er y en løsning	VS = HS (2/3 + 22/3e^(-3x))' = 2 – 3*(2/3 + 22/3e^(-3x)) 22/3e^(-3x)= 22/3e^(-3x)	VS = HS 2/3 + 22/3*e^0 = 8 8 = 8

desolve (y' = 2y(100-y) and y(0) = 8, x,y) giver y = 200e^(200x)/(2e^(200x) + 23). Husk at teste.

desolve (y' + 2xy = 4x and y(0) = 8, x,y) giver y = 6e^(-x^2) + 2. Husk at teste.

16. Sammensatte formler: den ydre skal og den indre kerne (A7, 28, 31)

Sammensatte formler adskilles ved at lægge 'klør5' k over den indre kerne-formel: $y = f(x) = s(k(x))$
Ved differentiation benyttes kæde-reglen $y' = s' * k'$

$y' = ?$	$y = (x^2+3)^4 = k^4$
$k = x^2+3$ $k' = 2x$	$y' = (s(k))' = s' * k' = (4*k^3)*(2x) = 8x*k^3 = 8x*(x^2+3)^3$

$I = ?$	$I = \int x(x^2+5)^3 dx$
$k = x^2 + 5$ $\frac{dk}{dx} = 2x$, dvs. $\frac{dk}{2x} = dx$	$I = \int x*k^3 \frac{dk}{2x} = ½ \int k^3\, du = 1/8\ k^4 = 1/8\ (x^2+5)^4$
Test	$I' = (1/8\ (x^2+5)^4)' = (1/8\ k^4)' = ½*k^3*2x = x(x^2+5)^3$

Ved differentiation af produkter bruger parenteser:

$y = f*g = (x^2)*(\sin x)$, $y' = (f*g)' = f'*g + f*g' = 2x*\sin x + x^2*\cos x$

17. Ki^2 forskelstest (A7)

Opgave: Er der forskel på rygere blandt kvinders og mænd, når 5 af 12 kvinder og 12 af 18 mænd er rygere?

Forskels-tallet mellem tabellens to kolonner findes som et to-vejs χ^2-tal?

	K	M	T
R	5	12	17
N	7	6	13
T	12	18	30

	K	M
R	$\frac{17}{30}*12 = 6.8$	$\frac{17}{30}*18 = 10.2$
N	$\frac{13}{30}*12 = 5.2$	$\frac{13}{30}*18 = 7.8$
T	12	18

	K	M
R	$\frac{(5 - 6.8)^2}{6.8} = 0.476$	$\frac{(12 - 10.2)^2}{10.2} = 0.318$
N	$\frac{(7 - 5.2)^2}{5.2} = 0.623$	$\frac{(6 - 7.8)^2}{7.8} = 0.415$
T	1.099	0.733

χ^2 Total = 1.099 + 0.733 = 1.832

På en formelregner indtastes tabellen i StatList, hvorefter der udføres en F6 χ 2 2-Way test.

En χ^2 tabel afgør kritiskhed.

Er de observerede og forventede tal ens, vil ki^2 = 0. Spørgsmålet er om forskellen er så stor, at den er signifikant. De signifikante forskelstal findes i en ki^2-tabel (95% signifikans).

Frihedsgrader	1	2	3	4	5	6	7	8
Kritisk forskel	3.841	5.991	7.815	9.488	11.07	12.592	14.067	15.507

Først findes antallet af frihedsgrader. Med 5 kategorier kan de 4 variere frit, hvorimod den femte altid vil kunne beregnes som 'resten'. Tilsvarende vandret: med to kategorier kan kategori 1 variere, men ikke den sidste, der altid vil være resten. Så antallet af frihedsgrader vil kunne beregnes af formlen frihedsgrader = (rækker – 1)*(kolonner – 1).

I vores tilfælde gælder da frihedsgrader = (2 – 1)*(2 – 1) = 1. Af tabellen ses, at den kritiske grænse ved 1 frihedsgrad er 3.84, hvis vi ønsker at vort svar skal være korrekt med 95% sandsynlighed.

Den observerede forskel er derfor ikke signifikant. Det ville den være hvis alle tal var 10 gange så store. Det er altså svært at konstaterer forskelle i små samlinger (populationer).

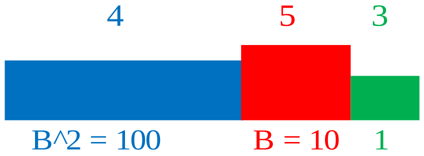
ALGEBRA: Der er fire måder at genforene på

Totalen T er 453

T = 4*10^2 + 5*10 + 3*1

T = 4*B^2 + 5*B + 3*1 *B: Bundt*

T: et polynomium (mange-led)



Algebra-firkanten

	Variable	Konstante
Styktal	**T = a+b**	**T = a*b**
Pertal	**T = Σ(a*b)**	**T = a^b**

Standardformler:

T = ?	**T = a+b**	T = ?	**T = a*b**	T = ?	**T = a^b**	T = ?	**T = a^b**	T = ?	**T = Σ (a*b)**
a = 3	T = 3+5	a = 3	T = 3*5	a = 3	T = 3^5	a = 5	T = 5^3	a = 3	T = 3*5 + 7*9
b = 5	**T = 8**	b = 5	**T = 15**	b = 5	**T = 243**	b = 3	**T = 125**	b = 5	**T = 78**
								c = 7	T = $\int_0^5 3dx + \int_5^{14} 7dx$
								d = 9	

Formler Forudsiger:

- $\boxed{\textbf{3 + 5 = 3 + 1 } \textit{5 gange}}$
- **3*5 = 3+3+3+3+3**
- **3^5 = 3*3*3*3*3**
- **5^3 = 5*5*5**
- **a*b + c*d = areal 1 + areal 2**

Tilbageregning eller ligningsløsning:

a = ?	T = a+b	a = ?	T = a*b	a = ?	T = a^b	b = ?	T = a^b	a = ?	T = Σ (a*b)
T = 30	30 = x+5	T = 30	30 = x*5	T = 30	30 = x^5	T = 30	30 = 4^x	T = 83	83 = t*5 + 7*9
b = 5	30 - 5 = x	b = 5	30/5 = x	b = 5	5√30 = x	a = 4	log4(30) = x	b = 5	83 - 63 = t*5
	25 = x		**6 = x**		**1.97 = x**		**2.45 = x**	c = 7	20/5 = t
TEST ?	VS = HS ?	TEST ?	VS = HS ?	TEST ?	VS = HS ?	TEST ?	VS = HS ?	d = 9	ΔT/Δx = t
	30 = 25+5		30 = 6*5		30 = 1.97^5		30 = 4^2.45		**4 = t**
	30 = 30		30 = 30		30 = 29.7		30 = 29.9	TEST ?	VS = HS ?
TEST OK	VS = HS !	TEST OK	VS = HS !	TEST OK	VS = HS !	TEST OK	VS = HS !		83 = 4*5+7*9
									83 = 83
								TEST OK	VS = HS !

30 = x + 5
30-5 = x

30-5 er det tal x,
som plusset med 5
giver 30

- <---> +

30 = x * 5
30/5 = x

30/5 er det tal x,
som ganget med 5
giver 30

/ <---> *

30 = x ^ 5
5√30 = x

5√30 er det tal x,
som opløftet i 5te
giver 30
Rod: Faktor-splitter

rod <---> exp

30 = 4 ^ x
log4(30) = x

log4(30) er det tal x,
der som eksponent
til 4 giver 30
Log: Faktor-tæller

log <---> grundtal

83 = Σ h*Δx
83/Δx = h
ΔT/Δx = h
ΔT/Δx er den højde
som ganget med Δx
og opsummeret
giver arealet 83

DIFF <---> INT

Standardopgaver med svar

T = a+b

	T	a	b	SVAR
1		3	12	15
2		5	15	20
3		7	18	25
4		9	21	30
5		11	24	35
6	40		27	13
7	45		30	15
8	50		33	17
9	55		36	19
10	60		39	21
11	65	23		42
12	70	25		45
13	75	27		48
14	80	29		51
15	85	31		54

T = a*b

	T	a	b	SVAR
1		3	12	36
2		5	15	75
3		7	18	126
4		9	21	189
5		11	24	264
6	351		27	13
7	450		30	15
8	561		33	17
9	684		36	19
10	819		39	21
11	966	23		42
12	1125	25		45
13	1296	27		48
14	1479	29		51
15	1674	31		54

T = a^b

	T	a	b	SVAR
1		9	2	81
2		8	3	512
3		7	4	2401
4		6	5	7776
5		5	6	15625
6	16384		7	4
7	6561		8	3
8	512		9	2
9	6561		8	3
10	16384		7	4
11	15625	5		6
12	7776	6		5
13	2401	7		4
14	512	8		3
15	81	9		2

T = Σ (a*b)

	T	a	b	c	d	SVAR
1		9	2	3	4	30
2		8	3	4	5	44
3		7	4	5	6	58
4		6	5	6	7	72
5		5	6	7	8	86
6	100		7	8	9	4
7	96		8	9	8	3
8	74		9	8	7	2
9	66		8	7	6	3
10	58		7	6	5	4
11	45	5		5	3	6
12	40	6		2	5	5
13	49	7		3	7	4
14	42	8		2	9	3
15	73	9		5	11	2
16	114	10	1		13	8
17	165	11	0		15	11
18	226	12	-1		17	14
19	297	13	-2		19	17
20	378	14	-3		21	20
21	469	15	-4	23		23
22	570	16	-5	26		25
23	681	17	-6	29		27
24	802	18	-7	32		29
25	933	19	-8	35		31

Bogstavregning

Lav en T-formel om til en a-formel. Test resultatet ved indsætning, ved solve og ved at gøre det modsatte bagefter.

	T	a	b	c
1	$T = a + b \cdot c$	$a = T – b \cdot c$	$b = \frac{T-a}{c}$	$c = \frac{T-a}{b}$
2	$T = a – b \cdot c$	$a = T + b \cdot c$	$b = \frac{a-T}{c}$	$c = \frac{a-T}{b}$
3	$T = a + \frac{b}{c}$	$a = T – \frac{b}{c}$	$b = (T–a) \cdot c$	$c = \frac{b}{T-a}$
4	$T = a – \frac{b}{c}$	$a = T + \frac{b}{c}$	$b = (a–T) \cdot c$	$c = \frac{b}{a-T}$
5	$T = (a + b) \cdot c$	$a = \frac{T}{c} – b$	$b = \frac{T}{c} – a$	$c = \frac{T}{a+b}$
6	$T = (a – b) \cdot c$	$a = \frac{T}{c} + b$	$b = a – \frac{T}{c}$	$c = \frac{T}{a-b}$
7	$T = \frac{a+b}{c}$	$a = T \cdot c – b$	$b = T \cdot c – a$	$c = \frac{a+b}{T}$
8	$T = \frac{a-b}{c}$	$a = T \cdot c + b$	$b = a – T \cdot c$	$c = \frac{a-b}{T}$
9	$T = \frac{a}{b+c}$	$a = T \cdot (b+c)$	$b = \frac{a}{T} – c$	$c = \frac{a}{T} – b$
10	$T = \frac{a}{b-c}$	$a = T \cdot (b–c)$	$b = \frac{a}{T} + c$	$c = b – \frac{a}{T}$
11	$T = \frac{a}{b} + c$	$a = (T–c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T-c}$	$c = T – \frac{a}{b}$
12	$T = \frac{a}{b} – c$	$a = (T+c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T+c}$	$c = \frac{a}{b} – T$
13	$T = a \cdot b^{c}$	$a = \frac{T}{b^{c}}$	$b = \sqrt[c]{\frac{T}{a}}$	$c = \frac{\ln(\frac{T}{a})}{\ln b}$
14	$T = \frac{a}{b^{c}}$	$a = T \cdot b^{c}$	$b = \sqrt[c]{\frac{a}{T}}$	$c = \frac{\ln(\frac{a}{T})}{\ln b}$
15	$T = (a \cdot b)^{c}$	$a = \frac{\sqrt[c]{T}}{b}$	$b = \frac{\sqrt[c]{T}}{a}$	$c = \frac{\ln T}{\ln(a \cdot b)}$
16	$T = (\frac{a}{b})^{c}$	$a = \sqrt[c]{T} \cdot b$	$b = \frac{a}{\sqrt[c]{T}}$	$c = \frac{\ln T}{\ln(\frac{a}{b})}$
17	$T = (a + b)^{c}$	$a = \sqrt[c]{T} – b$	$b = \sqrt[c]{T} – a$	$c = \frac{\ln T}{\ln(a+b)}$
18	$T = (a – b)^{c}$	$a = \sqrt[c]{T} + b$	$b = a – \sqrt[c]{T}$	$c = \frac{\ln T}{\ln(a-b)}$
19	$T = a + b^{c}$	$a = T – b^{c}$	$b = \sqrt[c]{T-a}$	$c = \frac{\ln(T-a)}{\ln b}$
20	$T = a – b^{c}$	$a = T + b^{c}$	$b = \sqrt[c]{a-T}$	$c = \frac{\ln(a-T)}{\ln b}$
21	$T = a^{(b+c)}$	$a = \sqrt[(b+c)]{T}$	$b = \frac{\ln T}{\ln a} – c$	$c = \frac{\ln T}{\ln a} – b$
22	$T = a^{(b–c)}$	$a = \sqrt[(b-c)]{T}$	$b = \frac{\ln T}{\ln a} + c$	$c = b – \frac{\ln T}{\ln a}$

Statistikopgaver

1

				MID		SPR	KVT
x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
10-30	3						
30-40	5						
40-50	9						
50-60	4						
60-70	2						

svar:

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,130	0,130	2,6	23,0	69,3	
0,217	0,348	7,6	8,0	14,1	35,5
0,391	0,739	17,6	2,0	1,5	43,9
0,174	0,913	9,6	12,0	24,9	50,6
0,087	1,000	5,7	22,0	41,9	
1,000		43,0		151,6	
MID±2·SPR:		*18,4*	*67,7*	12,3	

2

				MID		SPR	KVT
x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0-10	3						
10-20	9						
20-30	12						
30-40	11						
40-60	4						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,077	0,077	0,4	21,5	35,7	
0,231	0,308	3,5	11,5	30,7	17,5
0,308	0,615	7,7	1,5	0,7	26,3
0,282	0,897	9,9	8,5	20,2	34,8
0,103	1,000	5,1	23,5	56,5	
1,000		26,5		143,8	
MID±2·SPR:		*2,6*	*50,5*	12,0	

3

				MID		SPR	KVT
x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
30-40	12						
40-45	14						
45-50	16						
50-55	10						
55-60	7						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,203	0,203	7,1	10,8	23,7	
0,237	0,441	10,1	3,3	2,6	41,0
0,271	0,712	12,9	1,7	0,8	46,1
0,169	0,881	8,9	6,7	7,6	51,1
0,119	1,000	6,8	11,7	16,2	
1,000		45,8		50,9	
MID±2·SPR:		*31,5*	*60,1*	7,1	

4

				MID		SPR	KVT
x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
20-22	2						
22-24	4						
24-26	8						
26-28	5						
28-32	3						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,091	0,091	1,9	4,4	1,8	
0,182	0,273	4,2	2,4	1,1	23,8
0,364	0,636	9,1	0,4	0,1	25,3
0,227	0,864	6,1	1,6	0,6	27,0
0,136	1,000	4,1	4,6	2,9	
1,000		25,4		6,3	
MID±2·SPR:		*20,4*	*30,4*	2,5	

Ikke retvinklede trekanter

svar

	a	b	c	A	B	C	a	b	c	A	B	C
1	1,075			33,3		122,8		0,794	1,646		23,9	
2	2,212			42,5		133,1		0,252	2,392		4,4	
3	3,736			62,5		88,2		2,060	4,209		29,3	
4		4,372		51,0		76,8	4,298		5,383		52,2	
5		1,437		65,9		98,2	4,810		5,214		15,8	
6		4,903		21,5		87,0	1,893		5,162		71,5	
7			2,154	35,1		68,6	1,330	2,249			76,3	
8			2,256	38,4		46,1	1,945	3,118			95,6	
9			2,568	23,2		47,1	1,382	3,302			109,7	
10	1,740	3,541				68,6			3,327	29,1	82,3	
11	1,433	4,346				88,0			4,528	18,4	73,6	
12	4,298	5,724				57,3			4,966	46,8	75,9	
13		5,092	3,738	47,0			3,736				85,9	47,1
11		2,552	3,818	59,0			3,326				41,1	79,8
15		3,940	3,708	59,3			3,787				63,4	57,3
16	4,298		5,030		42,9			3,479		57,3		79,8
17	4,861		4,437		81,9			6,100		52,1		46,1
18	2,917		4,835		77,3			5,067		34,2		68,6

POTENSER

	f	f'	f''
1	x^3		
2	x^5	$3x^2$	$6x$
3	x^8	$5x^4$	$20x^3$
4	$x^{\frac{1}{2}}$	$8x^7$	$56x^6$
5	x^{-3}	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{4}x^{-1,5}$
6	x^{-1}	$-3x^{-4}$	$12x^{-5}$
7	$x^{-1,5}$	$-x^{-2}$	$2x^{-3}$
8	x	$-1,5x^{-2,5}$	$3,75x^{-3,5}$
9	$\sqrt{x}$	1	0
10	$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{4}x^{-1,5}$
11	$1/x^2$	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$-\frac{2}{9}x^{-5/3}$
12	$1/x^4$	$-2x^{-3}$	$6x^{-4}$
13	$x\sqrt{x}$	$-4x^{-5}$	$20x^{-6}$
14	$x^2\sqrt{x}$	$1,5x^{0,5}$	$0,75x^{-0,5}$
15	$1/\sqrt{x}$	$2,5x^{1,5}$	$3,75x^{0,5}$
16	$1/x\sqrt{x}$	$-\frac{1}{2}x^{-1,5}$	$0,75x^{-2,5}$
		$-1,5x^{-2,5}$	$3,75x^{-3,5}$

POLYNOMIER, MM.

	f	f'	f''
1	$3x^2-4x+2$		
2	$4x^2+3x-6$	$6x-4$	6
3	$2x^3-6x^2+3x-7$	$8x+3$	8
4	$5x^3+4x^2-6x+1$	$6x^2-12x+3$	$12x-12$
5	$2x-7$	$15x^2+8x-6$	$30x+8$
6	$x+3$	2	0
7	$7x^4-6x^2+2$	1	0
8	$2x^3-5x$	$28x^3-12x$	$84x^2-12$
9	$4/x + 5/x^2$	$6x^2-5$	$12x$
10	$3/x - 2/x^2$	$-4x^{-2}-10x^{-3}$	$8x^{-3}+30x^{-4}$
11	$1/x - 4/x^2 + 5/x^3$	$-3x^{-2}+4x^{-3}$	$6x^{-3}-12x^{-4}$
12	$4\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$	$-x^{-2}+8x^{-3}-15x^{-4}$	$2x^{-3}-24x^{-4}+60x^{-5}$
13	$8\sqrt{x} - 4/\sqrt{x}$	$2x^{-0,5}-x^{-1,5}$	$-x^{-1,5}+1,5x^{-2,5}$
14	$2x\sqrt{x} + 6x^2\sqrt{x}$	$4x^{-0,5}+2x^{-1,5}$	$-2x^{-1,5}-3x^{-2,5}$
15	$4x\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}$	$3x^{0,5}+15x^{1,5}$	$1,5x^{-0,5}+22,5x^{0,5}$
--------------------		$6x^{0,5}-5x^{1,5}$	$3x^{-0,5}-7,5x^{0,5}$
16	$2\sin x + 3\cos x$		
17	$4\cos x - 5\sin x$	$2\cos x-3\sin x$	$-2\sin x-3\cos x$
18	$3e^x - 8\cdot 2^x$	$-4\sin x-5\cos x$	$-4\cos x+5\sin x$
19	$5\cdot 3^x - 6\cdot e^x$	$3e^x-8\ln 2\cdot 2^x$	$3e^x-8(\ln 2)^2\cdot 2^x$
20	$4x^2 + 3\ln x$	$5\ln 3\cdot 3^x - 6e^x$	$5(\ln 3)^2\cdot 3^x - 6e^x$
21	$2\ln x - 6$	$8x + 3/x$	$8 - 3x^{-2}$
		$2/x$	$-2x^{-2}$

SAMMENSATTE UDTRYK

	f	$\frac{df}{dx}$
1	$(2x+1)^3$	$6(2x+1)^2$
2	$(4x+2)^4$	$16(4x+2)^3$
3	$(x^2-6x+3)^3$	$(6x-18)(x^2-6x+3)^2$
4	$4/(2x+3)$	$-8(2x+3)^{-2}$
5	$5/(3x+1)^2$	$-30(3x+1)^{-3}$
6	$6/(x^2+3x-2)$	$(-12x-18)(x^2+3x-2)^{-2}$
7	$4\sqrt{2x+1}$	$4(2x+1)^{-0,5}$
8	$5\sqrt{x^2+1}$	$5x(x^2+1)^{-0,5}$
9	$2/\sqrt{4x+3}$	$-4(4x+3)^{-1,5}$
10	$5/\sqrt{x^2+3}$	$-5x(x^2+3)^{-1,5}$
11	e^{2x+1}	$2e^{2x+1}$
12	e^{x^2+3}	$2xe^{x^2+3}$
13	3^{4x-2}	$4\ln 3\ 3^{4x-2}$
14	5^{x^2}	$2\ln 5\ x\ 5^{x^2}$
15	$\ln(2x+3)$	$2/(2x+3)$
16	$\ln(x^2+6)$	$2x/(x^2+6)$
17	$3\sin(4x+1)$	$12\cos(4x+1)$
18	$2\cos(3x+5)$	$-6\sin(3x+5)$

STIGNINGSFORHOLD, MAX OG MIN VÆRDIER

	f	stigningsforhold (monotoni)
1	$x^2 - 8x + 5$	f': − 0 + x: 4
2	$-3x^2 + 12x - 6$	+ 0 − 2
3	$2x^3 - 15x^2 + 24x - 6$	+ 0 − 0 + 1 4
4	$-x^3 + 3x^2 + 9x + 1$	− 0 + 0 − −1 3
5	$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$	− 0 + 0 − 0 + 0 1 2
6	$-x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 1$	+ 0 − 0 + 0 − −1 0 4
7	$\frac{x^2+3}{x^2-4}$	
11	$x\,e^x$	$e^x + xe^x$
12	$x^3 e^x$	$3x^2e^x + x^3e^x$
13	$x\,3^x$	$3^x + \ln 3\ x\ 3^x$
14	$x^2\,5^x$	$2x5^x + \ln 5\ x^2\ 5^x$
15	$x \ln x$	$\ln x + 1$
16	$x^4 \ln x$	$4x^3 \ln x + x^3$
17	$x \sin x$	$\sin x + x\cos x$
18	$x^2 \cos x$	$2x\cos x - x^2 \sin x$

POTENSER

1	$\int_1^3 x\,dx$	SVAR	
2	$\int_0^2 x^2\,dx$	$x^2/2$	4
3	$\int_1^3 x^3\,dx$	$x^3/3$	2,67
4	$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$	$x^4/4$	20
5	$\int_1^2 x\sqrt{x}\,dx$	$x^{1,5}/1,5$	1,89
6	$\int_1^4 1/\sqrt{x}\,dx$	$x^{2,5}/2,5$	1,86
7	$\int_1^4 1/x\sqrt{x}\,dx$	$x^{0,5}/0,5$	2
8	$\int_1^3 1/x^2\,dx$	$x^{-0,5}/-0,5$	1
9	$\int_1^3 6x\,dx$	$-x^{-1}$	0,67
10	$\int_0^2 -12x^2\,dx$	$3x^2$	24
11	$\int_1^3 4x^3\,dx$	$-4x^3$	-32
12	$\int_0^2 -6\sqrt{x}\,dx$	x^4	80
13	$\int_1^4 5x\sqrt{x}\,dx$	$-4x^{1,5}$	-11,3
14	$\int_1^2 -3/\sqrt{x}\,dx$	$2x^{2,5}$	62
15	$\int_1^4 4/x\sqrt{x}\,dx$	$-6x^{0,5}$	-2,49
16	$\int_1^3 -5/x^2\,dx$	$-8x^{-0,5}$	4
		$5x^{-1}$	-3,33

SIN X , COS X , E^X, 1/X

1. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$	SVAR
2. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$	2
3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx$	0
4. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$	0
5. $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$	0
6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$	0
7. $\int_0^{1} e^x dx$	2
8. $\int_0^{2} e^x dx$	1,718
9. $\int_{-1}^{1} e^x dx$	6,389
10. $\int_1^{2} 1/x\,dx$	2,35
11. $\int_2^{4} 1/x\,dx$	0,69
12. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1/x\,dx$	0,69
13. $\int_{-\pi}^{0} 3\sin x\,dx$	0,69
14. $\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}\cos x\,dx$	-6
15. $\int_0^{3} 4e^x dx$	0
16. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} 3/x\,dx$	76,34
	4,16

POLYNOMIER, MM.

1	$\int_1^2 (6x^2-4x+2)dx$	SVAR	
2	$\int_2^3 (16x^3+9x^2-4)dx$	$2x^3-2x^2+2x$	10
3	$\int_3^4 (3x^{-2}-4x^{-3})dx$	$4x^4+3x^3-4x$	313
4	$\int_1^2 (2x^{-3}+6x^{-4})dx$	$-3x^{-1}+2x^{-2}$	0,153
5	$\int_1^3 (3x^{0,5}+10x^{1,5})dx$	$-x^{-2}-2x^{-3}$	2,5
6	$\int_2^4 (5x^{-0,5}-7x^{2,5})dx$	$2x^{1,5}+4x^{2,5}$	66,75
7	$\int_1^5 (3x^2+3\sqrt{x}+5/x^2)dx$	$10x^{0,5}-2x^{3,5}$	-227,5
8	$\int_1^2 (12x^3-5x\sqrt{x}-6/x^2\sqrt{x})dx$	$x^3+2x^{1,5}-5x^{-1}$	148,4
9	$\int_0^{\pi/2} (\sin x+\cos x)dx$	$3x^4-2x^{2,5}+4x^{-1,5}$	33,1
10	$\int_{-\pi}^{\pi} (3\cos x-2\sin x)dx$	$-\cos x + \sin x$	2
11	$\int_1^2 (3e^x+4/x)dx$	$3\sin x + 2\cos x$	0
12	$\int_2^3 (5e^x-3/x)dx$	$3e^x + 4\ln x$	16,8
13	$\int_1^2 (4\cdot 2^x + 6\cdot 3^x)dx$	$5e^x - 3\ln x$	62,3
14	$\int_2^3 (1,5^x - 0,6^x)dx$	$\frac{4}{\ln 2}2^x + \frac{6}{\ln 3}3^x$	44,3
		$\frac{1,5^x}{\ln 1,5} - \frac{0,6^x}{\ln 0,6}$	2,49

AREAL OG RUMFANG

1-9: Find arealet mellem f- og g-kurven i intervallet I
10-14: f-kurven drejes 360° om x-aksen. Find rumfanget

	f	g	I	
1	$f = 2x-4$	$g = -\frac{1}{2}x+8$	$[2;4]$	SVAR
2	$f = x+1$	$g = \frac{1}{2}x+6$	$[1;5]$	9
3	$f = -x+6$	$g = x^2-6x+5$	$[0;5]$	14
4	$f = \frac{1}{2}x+2$	$g = x^2-4x+3$	$[1;4]$	25,83
5	$f = 2x^2-8x+6$	$g = -x^2+10x-24$	$[1;5]$	9,75
6	$f = x^2-4x+3$	$g = -x^2+6x-5$		28
7	$f = 2x-1$	$g = -x+5$	$[1;3]$	9
8	$f = -3x+3$	$g = x^2+x-2$	$[0;2]$	3
9	$f = x^2-2x-3$	$g = x^2-4x+1$	$[1;3]$	6
10	$f = \sqrt{2x+1}$		$[1;3]$	2
11	$f = x+3$		$[1;5]$	31,42
12	$f = 1/x$		$[2;4]$	469,1
13	$f = e^x$		$[2;3]$	0,79
14	$f = 2^x$		$[-1;1]$	547,9
				8,50

SAMMENSATTE UDTRYK OG PRODUKTER

1 $\int_0^1 x(x^2+2)^3 dx$

2 $\int_1^2 x/(x^2+1)^2 dx$

3 $\int_0^2 (2x+4)^3 dx$

4 $\int_1^3 xe^{x^2} dx$

5 $\int_0^1 \sin(2x+1)dx$ (rad.)

6 $\int_1^4 x/(x^2+1)\, dx$

7 $\int_0^1 x(2x+4)^3 dx$

8 $\int_1^2 x/(x+1)^3 dx$

----

9 $\int_1^3 x\, e^x\, dx$

10 $\int_2^3 x\, 5^x\, dx$

11 $\int_3^4 x\, e^{2x}\, dx$

12 $\int_1^4 x^2 e^x\, dx$

13 $\int_1^4 x^2 e^{-x}\, dx$

14 $\int_1^2 x \cos x\, dx$ (rad.)

15 $\int_3^4 x^2 \sin x\, dx$ (rad.)

SVAR

$\frac{1}{8}(x^2+2)^4$	8,1
$-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$	0,15
$\frac{1}{8}(2x+4)^4$	480
$\frac{1}{2}e^{x^2}$	4050
$-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$	0,765
$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$	1,07
$\frac{1}{20}(2x+4)^5-\frac{1}{4}(2x+4)^4$	77,6
$-(x+1)^{-1}+\frac{1}{2}(x+1)^{-2}$	0,097
$xe^x - e^x$	40,2
$\frac{x5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{(\ln 5)^2}$	163,3
$\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$	4712,4
$x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$	543,3
$-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$	1,36
$x\sin x + \cos x$	0,853
$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$	-4,68

DIFFERENTIALLIGNINGER

	f'	f
1	x^2	
2	x^3	$x^3/3 + K$
3	$4x^5$	$x^4/4 + K$
4	$5x^4$	$4x^6/6$
5	$x+3$	x^5
6	$4x-6$	$\frac{1}{2}x^2+3x$
7	x^2-2x+3	$2x^2-6x$
8	$6x^2+8x-1$	$\frac{1}{3}x^3-x^2+3x$
9	$1/x^2$	$2x^3+4x^2-x$
10	$1/x^4$	$-x^{-1}$
11	$6/x^3$	$x^{-3}/-3$
12	$8/x^5$	$-3x^{-2}$
13	$\sqrt{x}$	$-2x^{-4}$
14	$x^2\sqrt{x}$	$x^{1,5}/1,5$
15	$5x\sqrt{x}$	$x^{3,5}/3,5$
16	$1/\sqrt{x}$	$2x^{2,5}$
17	$1/(x\sqrt{x})$	$x^{0,5}/0,5$
18	$6/(x^2\sqrt{x})$	$x^{-0,5}/-0,5$
19	$\sin x$	$-4x^{-1,5}$
20	$\cos x$	$-\cos x$
21	$2\sin x + 3\cos x$	$\sin x$
22	$4e^x$	$-2\cos x+3\sin x$
23	$6/x$	$4e^x$
24	2^x	$6\ln x$
25	3^x	$2^x/\ln 2$
		$3^x/\ln 3$

Polynomier af grad 2

	f(x)	f(3)	Nulpunkter		f'(x)	f'(x)=0	f''(x)	Stamfunktion F(x)	Toppunkt		Tangent i x = 2	∫ f dx fra 1 til 2	Fortegn	Faktoropløsning
1	x^2 -6x+5	-4	1	5	2x-6	3	2	0,33x^3-3x^2+5x+k	3	-4	y = -2x+1	-1,67	+ - +	(x-1)(x-5)
2	x^2 -3x+2	2	1	2	2x-3	1,5	2	0,33x^3-1,5x^2+2x+k	1,5	-0,3	y = +1x-2	-0,17	+ - +	(x-2)(x-1)
3	2x^2 -10x+12	0	2	3	4x-10	2,5	4	0,67x^3-5x^2+12x+k	2,5	-0,5	y = -2x+4	1,67	+ - +	2(x-3)(x-2)
4	2x^2 -6x-8	-8	-1	4	4x-6	1,5	4	0,67x^3-3x^2-8x+k	1,5	-13	y = +2x-16	-12,33	+ - +	2(x-4)(x+1)
5	3x^2 -18x+15	-12	1	5	6x-18	3	6	1,00x^3-9x^2+15x+k	3	-12	y = -6x+3	-5,00	+ - +	3(x-5)(x-1)
6	3x^2 -24x+36	-9	2	6	6x-24	4	6	1,00x^3-12x^2+36x+k	4	-12	y = -12x+24	7,00	+ - +	3(x-6)(x-2)
7	4x^2 -40x+84	0	3	7	8x-40	5	8	1,33x^3-20x^2+84x+k	5	-16	y = -24x+68	33,33	+ - +	4(x-7)(x-3)
8	4x^2 -40x+64	-20	2	8	8x-40	5	8	1,33x^3-20x^2+64x+k	5	-36	y = -24x+48	13,33	+ - +	4(x-8)(x-2)
9	-4x^2 -12x-8	-80	-1	-2	-8x-12	-1,5	-8	-1,33x^3-6x^2-8x+k	-1,5	1	y = -28x+8	-35,33	- + -	-4(x+1)(x+2)
10	-4x^2 -4x+8	-40	1	-2	-8x-4	-0,5	-8	-1,33x^3-2x^2+8x+k	-0,5	9	y = -20x+24	-7,33	- + -	-4(x+2)(x-1)
11	-3x^2 -6x+9	-36	1	-3	-6x-6	-1	-6	-1,00x^3-3x^2+9x+k	-1	12	y = -18x+21	-7,00	- + -	-3(x+3)(x-1)
12	-3x^2 -6x+24	-21	2	-4	-6x-6	-1	-6	-1,00x^3-3x^2+24x+k	-1	27	y = -18x+36	8,00	- + -	-3(x+4)(x-2)
13	-2x^2 -4x+30	0	3	-5	-4x-4	-1	-4	-0,67x^3-2x^2+30x+k	-1	32	y = -12x+38	19,33	- + -	-2(x+5)(x-3)
14	2x^2 +8x-24	18	-6	2	4x+8	-2	4	0,67x^34x^2-24x+k	-2	-32	y = +16x-32	-7,33	+ - +	2(x+6)(x-2)
15	3x^2 +18x-21	60	-7	1	6x+18	-3	6	1,00x^39x^2-21x+k	-3	-48	y = +30x-33	13,00	+ - +	3(x+7)(x-1)
16	x^2 +6x-16	11	-8	2	2x+6	-3	2	0,33x^33x^2-16x+k	-3	-25	y = +10x-20	-4,67	+ - +	(x+8)(x-2)

Polynomier af grad 3

	f(x)	Faktoropløsning	Nulpunkter			Toppunkter		Tangent i x = 2	f(4)	Fortegn	Diff.	Stamfunktion F(x)
1	x^3 -2x^2-5x+6	(x-1)(x+2)(x-3)	1	-2	3	-0,79	2,12	y = -1*x + -2	18	- + - +	3x^2-4x-5	0,25x^4-0,67x^3-2,50x^2+6x+k
						8,21	-4,06					
2	x^3 -6x^2+11x-6	(x-1)(x-2)(x-3)	1	2	3	1,42	2,58	y = -1*x + 2	6	- + - +	3x^2-12x+11	0,25x^4-2,00x^3+5,50x^2-6x+k
						0,38	-0,38					
3	2x^3 -8x^2-22x+60	2(x-2)(x+3)(x-5)	2	-3	5	-1,00	3,67	y = -30*x + 60	-28	- + - +	6x^2-16x-22	0,5x^4-2,67x^3-11,00x^2+60x+k
						72,00	-29,63					
4	2x^3 -20x^2+62x-60	2(x-2)(x-3)(x-5)	2	3	5	2,45	4,22	y = +6*x + -12	-4	- + - +	6x^2-40x+62	0,5x^4-6,67x^3+31,00x^2-60x+k
						1,26	-4,23					
5	3x^3 -18x^2-57x+252	3(x-3)(x+4)(x-7)	3	-4	7	-1,21	5,21	y = -93*x + 276	-72	- + - +	9x^2-36x-57	0,75x^4-6,00x^3-28,50x^2+252x+k
						289,30	-109,30					
6	3x^3 -42x^2+183x-252	3(x-3)(x-4)(x-7)	3	4	7	3,46	5,87	y = +51*x + -132	0	- + - +	9x^2-84x+183	0,75x^4-14,00x^3+91,50x^2-252x+k
						2,64	-18,19					
7	4x^3 -32x^2-116x+720	4(x-4)(x+5)(x-9)	4	-5	9	-1,43	6,76	y = -196*x + 784	0	- + - +	12x^2-64x-116	1x^4-10,67x^3-58,00x^2+720x+k
						808,75	-290,82					
8	4x^3 -72x^2+404x-720	4(x-4)(x-5)(x-9)	4	5	9	4,47	7,53	y = +164*x + -496	0	- + - +	12x^2-144x+404	1x^4-24,00x^3+202,00x^2-720x+k
						4,51	-52,51					
9	-4x^3 +24x^2+76x-336	-4(x+4)(x-3)(x-7)	-4	3	7	5,21	-1,21	y = +124*x + -368	96	+ - + -	-12x^2+48x+76	-1x^4+8,00x^3+38,00x^2-336x+k
						145,74	-385,74					
10	-4x^3 +8x^2+76x-80	-4(x+4)(x-1)(x-5)	-4	1	5	3,27	-1,94	y = +60*x + -48	96	+ - + -	-12x^2+16x+76	-1x^4+2,67x^3+38,00x^2-80x+k
						114,20	-168,13					
11	-3x^3 +12x^2+33x-90	-3(x+3)(x-2)(x-5)	-3	2	5	3,67	-1,00	y = +45*x + -90	42	+ - + -	-9x^2+24x+33	-0,75x^4+4,00x^3+16,50x^2-90x+k
						44,44	-108,00					
12	-3x^3 +6x^2+33x-36	-3(x+3)(x-1)(x-4)	-3	1	4	2,69	-1,36	y = +21*x + -12	0	+ - + -	-9x^2+12x+33	-0,75x^4+2,00x^3+16,50x^2-36x+k
						37,79	-62,24					
13	-2x^3 +4x^2+10x-12	-2(x+2)(x-1)(x-3)	-2	1	3	2,12	-0,79	y = +2*x + 4	-36	+ - + -	-6x^2+8x+10	-0,5x^4+1,33x^3+5,00x^2-12x+k
						8,12	-16,42					
14	-2x^3 +4x^2+10x-12	-2(x+2)(x-1)(x-3)	-2	1	3	2,12	-0,79	y = +2*x + 4	-36	+ - + -	-6x^2+8x+10	-0,5x^4+1,33x^3+5,00x^2-12x+k
						8,12	-16,42					
15	-x^3 -4x^2+7x+10	-(x+1)(x+5)(x-2)	-1	-5	2	0,69	-3,36	y = -21*x + 42	-90	+ - + -	-3x^2-8x+7	-0,25x^4-1,33x^3+3,50x^2+10x+k
						12,60	-20,75					
16	-x^3 +7x^2-4x-12	-(x+1)(x-6)(x-2)	-1	6	2	4,36	0,31	y = +12*x + -24	20	+ - + -	-3x^2+14x-4	-0,25x^4+2,33x^3-2,00x^2-12x+k
						20,75	-12,60					

Oversigt over matematik på A-niveau

Matematik (Viden – til tal-forudsigelse)

Algebra (Genforening af tal)

Tal — Græske tal: bogstaver. Kan tælle, ikke plusse

Romerske tal: Ikoner. Kan plusse, ikke gange

Arabertal: Bundtning i polynomier. Kan gange: 23*74 = (20+3)*(70+4) = 1400 + 210 + 80 + 12 = 1702 (FOIL, renæssance)

Tal-forening og tal-opdeling (ligninger)

(p. 5) Plusning af uens styktal, gange af ens styktal, potens ved ens pertal, integration ved uens pertal

Minus i uens styktal, division i ens styktal, rod/logaritme i ens pertal, differentiation i uens pertal

Tal-ændring, vækst

Vækstal, tilvækst $\Delta y = y2 - y1$ — $\Delta y = \Sigma_{\Delta} y = \int dy$

Vækstfaktor, indeks Iy = y2 / y1 = a = 1 + r, r: vækstprocent, rente — 1+R = (1+r)^n

Konstant vækst (PreCalculus)

(p.18) Lineær vækst, ++ vækst: Konstant hældning a: Δy = a*Δx, (y2-y1) = a*(x2-x1), — y = b + a * x

(p. 20-21) Eksponentiel vækst, +* vækst: Konstant vækstfaktor a: Iy = a^Δx, y2/y1 = a^(x2-x1), — y = b * a ^ x

(p. 22) Potensvækst, ** vækst: Konstant elasticitet a: Iy = Ix^a: y2/y1 = (x2/x1)^a, — y = b * x ^ a

Variabel forudsigelig vækst (Calculus)

(p. 24-25) Differentiel vækst (fiktion): Lokalt konstant hældning a: dy/dx = a = y' = lim(Δy/Δx) for Δx->0

(p. 26-29) Integration (fakta): Samlet tilvækst = sum af enklet-tilvækster = Slut-y – begyndelses-y: — Δy = Σdy = y2-y1

Variabel uforudsigelig vækst (Statistik & Sandsynlighed)

(p. 30-31) Niveau & variation: X-gennemsnit & X-spredning (fiktion), eller X-kvartiler med boksplot (fakta)

n gentagelser med gevinstchance p (binomialfordeling): X-gennemsnit = n*p & X-spredning = √n*p*(1-p)

Hypotesetest: To fordelinger er forskellige hvis det samlede forskelstal (chi^2) er signifikant stort.

Geometri (Jordmåling)

Koordinat-fri geometri

(p. 6-7, 23) Mangekanter kan opdeles i trekanter, som kan opdeles i retvinklede trekanter: sinus & cosinus, tangens & sekant

Koordinat-bundet geometri, vektorgeometri, retnings-vektor: **r**(Δx, Δy, Δz)

(p. 8-12) 2D geometri — 1D underrum: Linie: koordinat-formel a*x+b*y+c = 0, vektor-formel **s** = **so** + t***r**

(p. 13-17) 3D geometri — 2D underrum: Plan: koordinat-formel a*x+b*y+c*z+d = 0, vektor formel **s** = **so** + t***r1** + u***r2**

1D underrum: Linie: vektor-formel **s** = **so** + t***r**

Skæring: Linje-linje, linje-cirkel. 3D: linje-linje, linje-plan, plan-plan, linje-kugle, plan-kugle. Parallel- og ortogonal-test.

Afstand: Punkt-punkt, punkt-linje, punkt-plan

CAS-Teknologi: Formelregner TI-89

Ligningsløsning: I hovedet ved overflytning. Algebraisk ved solver: solve(y1(x) = y2(x),x). Geometrisk ved skæring y1 = y2