Med per-tal består alle matematik B

Allan Tarp, VUC Aarhus, indsendt til LMFK-bladet nr. 3 2013, men afvist.

Verden skriger på ingeniører, og alligevel har adgangsvejen, matematik B, rekordhøj dumpeprocent. Hvad kan der gøres? Potentielt kan hver anden dreng blive ingeniør som 22årig, men to ting står i vejen: En linjeopdelt skole, som uddanner til embeder i den offentlige administration, og som de nordamerikanske republikker da også har erstattet med en blokopdelt skole, som afdækker og udvikler den unges individuelle talent gennem daglige lektier i selvvalgte halvårsblokke. Og den fjerde og sidste regneart, calculus, der fremstilles som svær til trods for, at den er let.

Dumpning på matematik B stopper, hvis man henter råd på matematikkongressen ICME, som afholdes hvert fjerde år, men hvis hjemmesider forbliver åbne. Her findes emnegrupper om bl.a. calculus. På ICME 11 findes således artiklen ‘Pastoral Calculus Deconsrtucted’ (http://tsg.icme11.org/document/get/TSG/695) med tilhørende YouTube video (http://youtu.be/yNrLk2nYfaY). Det er min rapport om, hvordan en postmodernisering kan gøre calculus, og dermed matematik B, tilgængelig for alle.

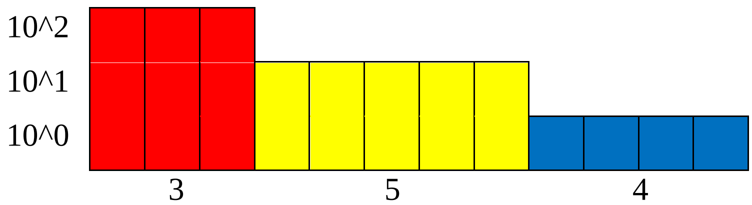
Postmoderne skepsis afdækker kontingens gennem dekonstruktion, dvs. afslører skjult, ’pastoralt’, formynderi ved at finde alternativer til vedtægter præsenteret som natur. Tænkningen stammer fra den franske republik og er inspireret af antikkens græske sofister, som sagde, at kun oplysning om forskel på natur og vedtægt kan forhindre skjult formynderi i form af vedtægt præsenteret som natur (kilde: Russell, B. (1945). A History of Western Philosophy. New York: A Touchstone Book.).

For at skelne natur fra vedtægt kan vi derfor spørge: Hvad er anderledes, hvis calculus respekterer matematikkens rødder som en naturvidenskab om det naturlige faktum Mange?

Matematik som en naturvidenskab om Mange

Dagligt ser vi mange eksempler på Mange: Mange mennesker, huse, biler, osv. Vi omgås Mange med to kompetencer, at tælle og at regne. Tælling giver som resultat et tal og en stykenhed. Forhold mellem to styktal giver så per-tal som 3kr/kg, 4 m/s eller 5m/100m = 5%, hvis enhederne er ens.

Efter optælling kan Mange forenes til en total, svarende til at algebra betyder at forene på arabisk. Skrevet på uafkortet form viser en total som T = 354 = 3*10^2 + 5*10 + 4*1 fire forskellige foreningsmåder: plus, gange, potens og integration, idet totalen ved tegning viser sig at være en sum af arealer anbragt ved siden af hinanden:



*Figur 1. Tallet 354 = 3*10^2 + 5*10 + 4*1 vist som en arealsum*

Der findes fire foreningsmåder, fordi tal optræder på fire forskellige måder: som konstante og variable styktal og pertal.

Foreningen af 3 kr og 5 kr forudsiges af plus-stykket T = 3+5. Foreningen af 3 kr 5 gange forudsiges af gange-stykket T = 3*5. Foreningen af 3% 5 gange forudsiges af potens-stykket T = 103%^5 – 100%, da man plusser 3% ved at gange med 103%. Og foreningen af 3 kg á 4 kr/kg og 5 kg á 6 kr/kg forudsiges af 3*4+5*6, dvs. af arealet under pertals-kurven, også kaldet integration, som ved at kombinere gange og plus er såre simpel.

Opdeling er det modsatte af forening, og opdelingsresultater forudsiges af de modsatte regnearter: minus, som finder forskellen; division, som tæller enheder; rod som finder faktorer; logaritme, som tæller faktorer; og differentiation, der regner tilbage til pertallet ved, som det modsatte af gange efterfulgt af plus, at være minus efterfulgt af division, og som sådan er såre simpel.

Opsamling af opdeling i	**Variable**	**Konstante**
Styktal kr, kg, s	**Plus:** **T = a + b** Minus: T – b = a	**Gange:** **T = a * b** Division: T/b = a
Pertal kr/kg, kr/100kr = %	**Integration:** **T = Σ f*Δx** Differentiation: ΔT/Δx = f	**Potens:** **T = a ^ b** Rod: b√T = a Logaritme: loga(T) = b

Figur 2. De fire forskellige taltyper forenes af hhv. plus, gange, potens og integration

Altså, algebraisk kombinerer integration gange og plus, mens differentiation modsat kombinerer minus og division. Og geometrisk er integration arealet under pertals-kurven, mens differentiation er hældningen på total-kurven.

Precalculus på matematik C handler om vækst med konstante styktal eller procenttal, altså om den anden og tredje foreningsmåde.

Calculus på matematik B handler så om den fjerde og sidste foreningsmåde, vækst med variable pertal.

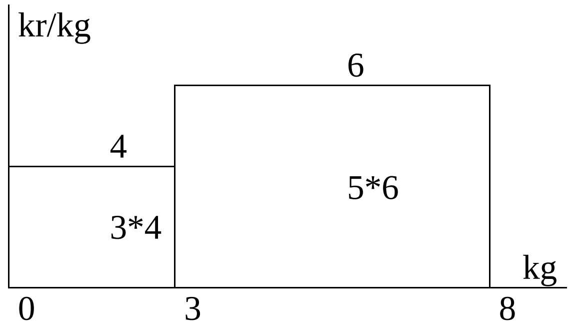
Gennemsnit og brøker som eksempler på pertal

Gennemsnitsregning er et eksempel på forening af variable styktal og pertal: 3 kg á 4kr/kg og 5 kg á 6 kr/kg giver 8 kg á ? kr/kg. Her forenes styktallene 3 og 5 ved plus, hvorimod pertallene 4 og 6 forenes ved arealet under pertals-kurven:

3 kg á 4 kr/kg giver 3*4 = 12 kr
5 kg á 6 kr/kg giver 5*6 = 30 kr

8 kg á ? $/kg giver 42 kr

? = (3*4+5*6)/(3+5)



Figur 3. Ved gennemsnitsregning forenes pertal ved en arealsum

Det omvendte spørgsmål lyder: ’3 kg a 4 kr/kg og 5 kg á hvor mange kr/kg giver 8 kg a 7 kr/kg?’ Pertallet fås ved at trække den første total T1 fra den samlede total T og derefter dividere med 5, altså ved differentiation: pertal p = (T-T1)/5 = ΔT/5.

Brøker er også pertal: 3 kr per 5 kg = 3kr/5kg = 3/5 kr/kg. Eksempelvis forenes 1 cola af 2 flasker med 2 colaer af 3 flasker ved regnestykket T = ½*2 + 2/3*3 = 3/5*5, idet vi igen forener styktallene 2 og 3 med plus, of pertallene ½ og 2/3 ved arealet under pertals-kurven.

Det lyder utroligt i dag, men tidligere påstod lærebøger, at ½ + 2/3 gav 7/6, altså at totalen skulle være syv colaer af seks flasker. Matematik, som er sand i biblioteket, men ikke i laboratoriet, kan kaldes ’matematisme’. Denne afart er heldigvis på vej ud af matematikken.

Tre typer konstans

I gennemsnitsregning er pertallet stykkevis konstant. Hvordan beregnes gennemsnit af et voksende pertal, som f.eks. en frit faldende genstands meter/sekund tal, også kaldet hastighed?

Igen giver arealet under pertals-kurven svaret, da variable tal som regel er lokalt konstante (kontinuerte). Lokal konstans over et lille stykke er den tredje af tre former for konstans:

Et variabelt tal y er *globalt* konstant c, hvis der for alle positive tal d gælder, at afstanden mellem y og c er mindre en d.

Et variabelt tal y er *stykkevis* konstant c, hvis der eksisterer en intervalradius e, så der for alle positive tal d gælder, at afstanden mellem y og c er mindre en d inden for e.

Et variabelt tal y er *lokalt* konstant c, hvis der for alle positive tal d gælder, at der eksisterer en intervalradius e, så afstanden mellem y og c er mindre en d inden for e.

Figur 4. Definition af de tre forskellige former for konstans

Da lokal konstans er konstans over små stykker, beregnes arealet under pertals-kurven som en sum af mange små arealstrimler, hvilket sker hurtigt med en computer. Men der findes en snedig genvej, for ved opsummering af enkelt-tilvækster forsvinder mellemtallene, så den samlede tilvækst blot er forskellen mellem start-tallet og slut-tallet.

Tal T	Enkelt-tilvækster ΔT	Opsummeret Σ Δ T
to		
t1	t1 – to	t1 – to
t2	t2 – t1	t2 – to
t3	t3 – t2	t3 – to

Figur 5. Opsummering af mange enkelt-tilvækster giver én samlet tilvækst = sluttal - startstal

Genvejen til beregning af arealet under en y-kurve er altså at omskrive areal-strimler y*dx til areal-tilvækster dA.

Antag at vi kan vise, at for en lille x-tilvækst, dx, kan arealstrimlen 2*x*dx omskrives til tilvæksten d(x^2). De små arealstrimler under pertals-kurven y = 2x har da størrelsen y*dx = 2*x*dx = d(x^2). Opsummeres disse eneklt-tilvækster fra x = 1 til x = 4 fås den samlede tilvækst af x^2, som er slut-tal minus start-tal, dvs. 4^2 – 1^2 = 15. Dette resultat kan testes på en CAS-regner.

Hvis vi bruger et gammeldags S som symbol for en sum af små tilvækster, kan vi nu skrive:

$$\text{Areal} = \int_1^4 2*x\,dx = \int_1^4 d(x\text{^}2) = \Delta x\text{^}2 \Big|_1^4 = 4\text{^}2 - 1\text{^}2 = 15$$

For at udnytte genvejen fuldt ud, må vi se nærmere på tilvækstregning

Tilvækstregning

Omskrivningen ovenfor af tallet 345 viser, at et tal i virkeligheden er en formel med mange led, også kaldet en potens-sum eller et poly-nomium. Potensers vækst kan studeres ved at se på et rektangel med siderne f og g, der begge antages at afhænge af sammen variabel x.

df	df * g	df * dg
f	A = f * g	f * dg
	g	dg

Figur 5. Et rektangel har tre vækstdele

En lille tilvækst i x, dx, giver en lille tilvækst i f og g, df og dg, som giver arealet A = f*g en lille tilvækst, dA, som består af tre stykker, df * g, f * dg og df * dg.

Da df*dg kan gøres vilkårlig lille, vil dA og f*dg + f*dg være lokalt ens.

Dannes vækstforholdet med dx, fås følgende formel for den lokale tilvækst:

$d(f*g)/dx = df/dx*g + f*dg/dx$, eller $(f*g)' = f'*g + f*g'$, hvor $df/dx = f'$.

Hvis $y = x$, så er $y' = dy/dx = dx/dx = 1$.

Hvis $y = x^2 = x*x$, så er $y' = (x*x)' = x'*x + x*x' = 1*x + x*1 = 2x$

Hvis $y = x^3 = x^2*x$, så er $y' = (x^2*x)' = (x^2)'*x + x^2*x' = 2x*x + x^2*1 = 2x^2+x^2 = 3x^2$

På samme måde indses at $(x^4)' = 4x^3$, $(x^5)' = 5x^4$ osv.

Da $(x^2)' = d(x^2)/dx = 2x$ har vi hermed vist, at $2*x*dx = d(x^2)$.

Hældningsregning

Tegnes forskellige eksempler på talformlen $y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$, ser vi, at y-kurven begynder i d med hældning c, som den så krummer væk fra, for senere (eller før) at krumme tilbage imod. Derfor kan vi kalde d for start-niveau, c for start-hældning, b for start-krumning og a for modkrumning.

Disse navne stemmer overens med de tilsvarende niveau-, hældnings- og krumningsformler:

$y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d = d$ for $x = 0$

$y' = 3a*x^2 + 2b*x + c = c$ for $x = 0$

$y'' = 6a*x + 2b = 2b$ for $x = 0$

Da pertallet angiver hældningen på totalkurven, vil et fortegnsskift i pertallet fra minus til plus ændre kurvens udseende fra aftagende til voksende gennem et mellemliggende bundpunkt. Tilsvarende findes et toppunkt, hvor pertallet har fortegnsskift fra plus til minus. Endvidere ses, at toppunkt og bundpunkt hører sammen med hhv. negativ og positiv krumning.

	2		4		x	
$\nearrow$	LokMax	$\searrow$	LokMin	$\nearrow$	$y = x^3 – 9x^2 + 24x + 5$	
+	0	–	0	+	$y' = 3x^2 – 18x + 24$	$= 0$ for $x = 2$ og $x = 4$
	–	0	+		$y'' = 6x – 18x$	$= 0$ for $x = 3$

Figur 6. Fortegnsskift i y' og y'' oplyser om vækstforholdene for y

Hvis pertallet er konstant, er kurven lineær. Hvis pertallet er stykkevis konstant, er kurven stykkevis lineær. Hvis pertallet er lokalt konstant, er kurven lokalt lineær. Fastholdes det lokale pertal, vil kurven følge en ret linje, der er lokalt sammenfaldende med kurven omkring røringspunktet, og som kaldes kurvens tangent. Tangentens ligning er derfor

$\Delta y/\Delta x = dy/dx$, hvor $\Delta y = y – yo$ og $\Delta x = x – xo$

Den historiske baggrund for calculus

Calculus opstod, da England ønskede at bruge stjålent spansk sølv til indkøb af peber og silke i Indien, og måtte sejle efter månen på åbent hav for at undgå Portugals befæstning af Afrikas kyst. Kirkens opfattelse af, hvordan månen bevæger sig, blev undsagt af Newtons fire nej'er:

Nej, månen bevæger sig ikke mellem stjernerne, den falder mod jorden som æblet, dog i et fald, hvis krumning svarer til jordkuglens, og som derfor er evigt.

Nej, månen og æblet følger ikke en metafysisk Herres uberegnelige vilje, de følger deres egen fysiske vilje, som er beregnelig, da den følger en formel for tyngdekraft.

Nej, en kraft giver ikke bevægelse, men ændring i bevægelse.

Nej, algebra kan ikke bruges til ændringsregning, vi skal udvikle en ny regneart, calculus.

Modelbygning med regression

Talformlen T = 3*x^2 + 5*x + 4*1 giver anledning til forskellige formeltyper:

Rette linjer med konstant vækst, y = a*x + b, hvor bestemmelse af de 2 konstanter a og b kræver en tabel med 2 rækker af sammenhørende x- og y-værdier.

Krumme linjer (parabler) med konstant acceleration, y = a*x^2 + b*x + c, hvor bestemmelse af de 3 konstanter a, b og c kræver en tabel med 3 rækker af sammenhørende x- og y-værdier.

Krumningsskiftende linjer (dobbeltparabler), y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d, hvor bestemmelse af de 4 konstanter a, b, c og d kræver en tabel med 4 rækker af sammenhørende x- og y-værdier.

I matematikmodeller kan regression omsætte data-tabeller til formler, der kan besvare relevante spørgsmål. Ved pertals-tabeller vil man typisk spørge efter det gennemsnitlige pertal. Og ved styktals-tabeller vil man typisk spørge til vækstforhold og til optimerende top- eller bundpunkter.

Navngivning

Hvorfor supplere officielle betegnelser som monotoniforhold med alternative som vækstforhold? Fordi postmoderne tænkning udviser sepsis over for vedtægt præsenteret som natur, som f.eks. monotoniforhold, der mere naturligt kunne betegnes som vækstforhold, og som postmoderne skepsis derfor dekonstruerer for at afsløre skjulte alternativer, der er mere naturlige, om som måske gør det betegnede lettere at forstå og at lære.

Konklusion

Calculus udøver skjult formynderi ved at fortie sin oprindelse som forening af variable pertal. Dette gør calculus svær med høje dumpeprocenter til følge. Modsat er forening af variable pertal så enkelt at forstå, at alle består matematik B eksamen, hvoraf et stort flertal vil søge uddannelse inden for anvendelse af pertal som økonom eller ingeniør. Pertals-baseret calculus giver nemlig rigelig med tid til repetition af stoffet, til at lave projekter til mundtlig eksamen og til ekstra skriftlige opgaver både med og uden CAS-regner til skriftlig eksamen. Den store dumpeprocent på matematik B er altså ikke natur, men en bevidst eller ubevidst vedtægt, som præsenteres som natur. Man kan naturligvis undskylde sig med, at man ikke var oplyst om alternativet til den herskende tradition. Det er netop derfor, kontingensforskning er udviklet som metode til gennem postmoderne dekonstruktion at afdække skjulte alternativer til vedtægt præsenteret som natur. Pertals-alternativet gør calculus-undervisning til et valg. Man kan nu ikke længere undskylde sig med blot at følge ordrer. Man må realisere sin natur som menneske gennem et bevidst valg: Skal jeg opretholde en høj dumpeprocent, eller skal jeg gøre den sidste af de fire foreningsmåder, calculus, tilgængelig for alle?

Materiale

Materiale om pertals-baseret calculus kan hentes gratis på http://mellemskolen.net/materiale/gymnasie t/. Her findes er et teori-kompendium til matematik B, og et projekt-kompendium med 15 matematikmodeller for bl.a. afstandsbestemmelse, prognoser, pension, golf, indsamling, vinkartonner, kørsel, kursudsving ved overtagelsesforsøg, lineær programmering, spilteori, mm. Samme sted findes også gratis kompendier til C- og A-niveauet. Endelig findes der som sagt en vejledning som video på YouTube.

Personligt er der nu tredje gang, jeg publicerer lærebogsmateriale om Calculus.

’Matematiske Vækstmodeller’, GMT 1974, tilbød modelbygningens vekselvirkning mellem problemer og løsninger i virkeligheden og matematikken som alternativ til den herskende tradition, som stort set var renset for omverdenseksempler.

’Differentialregning og integralregning’, Lyng 1981, havde kompendiets korte form. Det indførte betegnelserne lokalt konstant og lokalt lineær, det viste at integralregning kan behandles før differentialregning, det brugte computere i beviser, og det indeholdt mange programmerede opgaver med elevsvar til rutinetræning.