Med CAS kan alle bestå matematik C

Allan Tarp, VUC Aarhus

'Saving Dropout Ryan with a TI-82' hed et bidrag til matematikkongressen ICME 12. Det er min rapport om, hvordan en formelregner kan postmodernisere matematik C, så det bliver tilgængeligt for alle. Rapporten findes på http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1129.pdf, og den tilhørende video kan ses på YouTube, http://www.youtube.com/watch?v=3C39Pzos9DQ.

Postmoderne tænkning er skeptisk over for skjult formynderi i form af vedtægter præsenteret som natur, og søger at afdække skjulte alternativer til sådanne, formelt kaldet at afdække kontingens gennem dekonstruktion. Tænkemåden stammer fra den franske republik og er inspireret af antikkens græske sofister, som sagde, at kun oplysning om forskel på natur og vedtægt kan forhindre skjult formynderi i form af vedtægt præsenteret som natur (kilde: Russell, B. (1945). A History of Western Philosophy. New York: A Touchstone Book.).

Med hensyn til matematik C er spørgsmålet derfor: Hvad er natur og hvad er vedtægt i matematik C? Eller sagt på en anden måde: Hvordan ser matematik C ud, hvis den opbygges som en naturvidenskab om det naturlige faktum Mange?

Matematik som en naturvidenskab om Mange

I vores omverden ser vi dagligt forskellige eksempler på begrebet mange: Mange mennesker, mange træer, mange huse, mange biler, osv. Vi omgås Mange med to kompetencer, at tælle og at regne. Tælling sker ved at bundte og stakke. En total på 7 pinde kan således optælles i 3ere ved at fjerne 3-bundter 2 gange:

T = I I I I I I I = III III I = 2*3 + 1

Optælling sker altså ved at fjerne bundter flere gange og stakke dem lodret. Dette skaber regnearterne division og gange, samt en lodret optællingsformel T = (T/b)*b: Fra T kan b fjernes T/b gange. De resterende fås ved at fjerne de 2 3ere fra totalen og anbringe den ved siden af resten. Dette skaber regnearterne minus og plus, samt en vandret optællingsformel T = (T-b)+b: Fra T kan b fjernes og anbringes ved siden af T-b. Tilsammen kan de to formler forudsige resultatet i teorien, før optællingen sker i praksis, og dermed illustrere matematikkens styrke, dens evne til at forudsige tal:

T = 7 1ere = (7/3)*3 = 2.?*3, og T = (7 – 2*3) + 2*3 = 1 + 2*3 = 2.1 3ere

Dette viser, at naturlige tal er decimaltal med enheder, hvor decimaltegnet adskiller bundter og ubundtede. Optælling i tiere kan f.eks. give resultatet T = 5.4 tiere, hvilket desværre skrives som T = 54.0, dvs. uden enhed og med fejlplaceret decimaltegn. Samtidig kaldes dette et naturligt tal, selv om det i virkeligheden er det modsatte. Naturlige tal skrives som de siges, altså som fem-ti-fire, hvor bundter og ubundtede adskilles og enheden medtages, som f.eks.

T = tre-og-fir-sinds-tyve = 4.3 tyvere.

Optællingsformlerne viser, at den naturlige rækkefølge for de fire regnearter er division, gange, minus og plus, hvor plus er særlig svær, da man kan plusse både lodret og vandret. Altså, præcis den modsatte rækkefølge af den, der præsenteres som den naturlige.

Efter optælling kan to totaler forenes, f.eks. T1 = 2 3ere og T2 = 3 4ere. Skal totalerne forenes lodret, skal enhederne være ens, dvs. vi må skifte enhed, også kaldet proportionalitet, hvilket netop sker ved brug af den lodrette optællingsformel T = k*b. Men totalerne kan også sammenlægges vandret som (3+4)ere, dvs. 7ere. Her er totalen da summen af de to arealer 2*3 og 3*4, så 2 3ere + 3 4ere = 2.4 7ere. Dvs. vandret sammenlægning er i virkeligheden integration.

En naturlig korrekt matematik vil naturligvis tillade '2. ordens ikon-optælling' i bundtstørrelser under ti. Her vil børn fra første klasse på naturlig måde praktisere og lære både omtælling ved proportionalitet og integration ved sidelæns sammenlægning.

Men denne læringsmulighed forhindres af den politisk korrekte matematik, som kræver, at optælling kun må foregå som '3. ordens optælling' i tiere, og som dermed bliver et eksempel på Sskjult formynderi findes sådedesallerede fra første klasse i skolen. Og skjult formynderi afdækkes altså ved at opbygge matematik som en naturvidenskab om det naturlige faktum Mange. Findes der ligeledes skjult formynderi på matematikkens C-niveau, kaldet precalculus internationalt?

Skjult formynderi på matematik C

Også på C-niveauet beskriver tal-sproget matematik totaler med tal og regnearter kombineret til formler, skrevet kort som f.eks. T = 456, eller udførligt som T = 4*B^2 + 5*B + 6*1, dvs. som 4 hundreder og 5 tiere og 6 enere, da vi som regel bruger bundtstørrelsen B = ti, som da skrives 1 bundt og ingen ubundtede: ti = 1*B + 0*1, eller kort ti = 10. Denne formeltype kaldes en mange-led formel eller et poly-nomium, hvor led betegner de forskellige stakke, som er plusset vandret ved siden af hinanden.

Den udførlige skrivemåde viser to ting: Alle tal har enheder, så 2+3*4 bør egentlig skrives 2*1 + 3*4, altså 2 enere og 3 firere. Og alle tal er formler, der indeholder de fire regnearter, som forener tal: lodret plus, gange, potens og vandret plus, også kaldet integration. At regnearter forener, fremgår af navnet algebra, som betyder at genforene på arabisk.

Regnearter forudsiger tælleresultater, både når vi forener 'styk-tal' som 4 kr og 5 kr, og når vi forener 'per-tal' som 4 kr/kg og 5 kr/kg. At forene 4kr og 5kr forudsiges af plus: T = 4+5. At forene 4kr 5 gange forudsiges af gange: T = 4*5. At forene 4% 5 gange forudsiges af potens: 100% + T = 104%^5. At forene 6 kg á 4 kr/kg med 10 kg á 5 kr/kg forudsiges af arealet under per-tals kurven : T = 64*4 6 + 75*5 10 = Σ p*Δx.

I et dobbelt-regnestykke afgøres rækkefølgen ved at reducere det til et enkelt regnestykke ved at sætte en skjult parentes om det stærkeste regnestykke:

T = 2+3*4 = 2+(3*4) , T = 2+3^4 = 2+(3^4) , T = 2*3^4 = 2*(3^4)

Den modsatte proces, opdeling af en total i del-totaler, kaldes tilbageregning eller ligningsløsning. Denne gang forudsiges resultatet af de modsatte regnearter: Svaret på spørgsmålet '?+3=15' forudsiges af den modsatte regneart til plus, minus, hvor 15-3 netop defineres som det tal x, der lagt til 3 giver 15. Altså hvis x+3 = 15, så er x = 15-3. Heraf ses, at ligningen x+3 = 15 løses ved at tal overflyttes til modsat side med modsat regnetegn. Metoden 'modsat side med modsat tegn' gælder også for de øvrige regnearter. Den tredje rod er en faktorfinder, der finder den faktor som tre gange giver 125. Den tredje logaritme er en faktortæller, som finder, hvor mange 3faktorer, der er i 243.

?+3 = 15	**?*3 = 15**	**?^3 = 125**	**3^? = 243**
x+3 = 15 x = 15 – 3	x*3 = 15 $x = \frac{15}{3}$	x^3 = 125 $x = \sqrt[3]{125}$	3^x = 243 $x = \log_3(243)$
plus ↔ minus	gange ↔ division	eksponent ↔ rod	grundtal ↔ log

At der netop er 2 x 4 måder til at forene og opdele tal skyldes, at der er fire forskellige typer tal: Konstante og variable, styktal og pertal:

Opsamling af Opdeling i	Variable	Konstante
Styktal kr, kg, s	**Plus:** **T = a + b** Minus: T – b = a	**Gange:** **T = a * b** Division: T/b = a
Pertal kr/kg, kr/100kr = %	**Integration:** **T = ∫ f dx** Differentiation: dT/dx = f	**Potens:** **T = a ^ b** Rod: b√T = a Logaritme: loga(T) = b

På matematik C niveauet præsenteres 2+3*4 som værende 14 per vedtægt, hvor det altså er 14 per natur. Og i stedet for at præsentere den naturlige måde at løse ligninger på, ’flyt til modsat side med modsat regnetegn’, præsenteres neutraliseringsmetoden ’gør det samme på begge sider’ som den naturlige metode, til trods for at den ikke er natur men vedtægt. Og forskellen på styk-tal og per-tal forties ganske, skønt de forekommer overalt i virkeligheden. Så ja, der er mange eksempler på skjult formynderi også på matematikkens C-niveau.

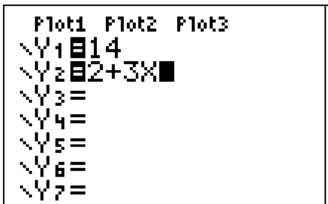
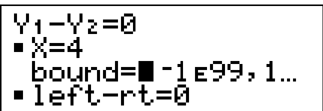
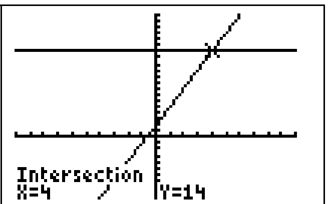
Formler, ligninger og funktioner

En formel er en kombination af tal og regnearter. En formel med 1 ubekendt kaldes en ligning, og en formel med to ubekendte kaldes en funktion. En funktion kan tabellægges og evt. graftegnes.

Ligningsløsning kan dokumenteres med et formel-skema med 2 søjler og 3 rækker. I højre søjle skrives formlen øverst, og i den venstre søjle skrives formlens tal, den ubekendte over og de kendte under linjen. Til højre under linjen indsættes de kendte tal i formlen, så den omformes til en ligning, som løses manuelt eller med maskine. I nederste højre del testes den fundne løsning ved at indsætte alle tal i formlen for at undersøge, om formlens venstre og højre side er ens.

Det ukendte tal	c = ?	T = a+b*c	*Formlen*
De kendte tal	a = 2	14 = 2+(3*c)	*De kendte tal og skjulte parenteser indsættes*
	b = 3	14-2 = 3*c	*Ligningen løses, ved at flytte til modsat side med modsat regnetegn, idet eksisterende regnestykker sættes i parentes; eller med SOLVER*
	T = 14	$\frac{(14-2)}{3} = c$	
		4 = c	*Løsning*
Test: Er VS = HS?	Test	14 = 2+3*4	
Testen stemmer!		14 = 14 ☺	

En formelregner, også kaldet et CAS-værktøj, har en Y-liste, hvor formlens venstre side indtastes som Y1 og højre side som Y2. På en formelregner løses en ligning da algebraisk ved at indtaste ’Solve 0 = Y1-Y2’; eller geometrisk ved at finde skæringspunkterne for graferne for Y1 og Y2.

			
Y1 = venstre side Y2 = højre side	Ligningen 0 = Y1-Y2 indtastes kun én gang	Indtast et x-gæt og tryk SOLVE	Skæringspunkter findes

Tre former for konstant vækst

Den grundlæggende tal-formel T = a*b^c + d giver anledning til hhv. proportionale, lineære, eksponentielle og potentielle funktioner:

y = 3*x, y = 3*x+2, y = 3*2^x, y = 3*x^2.

De tre første funktioner forekommer ved opsparing af penge:

Opsparing af 3 kr. x gange giver totalen y = 3*x.

Opsparing af 3 kr. x gange oven i et begyndelsesbeløb på 7 kr. giver totalen y = 3*x + 7

Opsparing ved at forrente 200 kr. med 3% x gange giver totalen y = 200*103%^x, da man lægger 3% til 200 kr. ved at gange med 103%.

Potensfunktioner forekommer bl.a. inden for geometri ved beregning af arealer og rumfang, f.eks. y = x^2 og y = x^3.

Hvis y kan findes af en formel f(x) med x som ubekendt, vil en x-ændring medføre en y-ændring.

I en lineær funktion y = b + a*x vil x-ændringen +1 give y-ændringen +a, som kaldes væksttallet eller hældningen. Lineær vækst kaldes derfor også ++ vækst.

I en eksponentiel funktion y = b*a^x vil x-ændringen +1 ændre y med faktoren *a og dermed med vækstprocenten r = a-1. Eksponentiel vækst kaldes derfor også +* vækst.

I en potens funktion y = b*x^a vil x-ændringen 1% give y-ændringen a%, som kaldes elasticiteten. Potens vækst kaldes derfor også ** vækst.

Graferne for de tre vækstformer giver rette linjer på hhv. almindeligt ++ papir, enkeltlogaritmisk +* papir og dobbeltlogaritmisk ** papir, hvor en logaritmeskala er en teknisk betegnelse for en gangeskala, hvor alle gangeskridt er lige lange. Ganske vidst overflødiggør en formelregner teknisk papir i matematikfaget, men andre fag bruger stadig teknisk papir.

Modellering med regression

De tre vækstformer udgør tilsammen konstant vækst. De to typiske opgaver er prognoseopgaver, hvor man skal finde y med kendt x, eller omvendt; og modelopgaver, hvor man skal opstille en formel ud fra en tabel med to linjer, og hvor væksten kan findes af vækstformler eller ved at anvende en formelregner til regression.

Regression kan også modellere variabel vækst, f.eks. et polynomium af grad 2 med konstant krumning, eller et polynomium af grad 3 med konstant modkrumning, osv.

Dvs. i en tabel giver 2 linjer grad 1 i et polynomium, 3 linjer giver grad 2, 4 linjer giver grad 3 osv. Ganske vidst omfatter matematik C niveauet kun tabeller med to linjer, men med regression er det naturligt også at inddrage tabeller med flere end to linjer, da det giver en naturlig introduktion til næste matematikniveau.

Den kvantitative litteraturs tre genrer: Fakta, fiktion og fidus

Vi beskriver vores omverden med både ord og tal. Vi har altså to sprog, et tale-sprog, der itale-sætter kvalitative fænomener, og et tal-sprog, der ital-sætter kvantitative fænomener. Da sprog kan bruges både til at informere og debattere, er det vigtigt at kunne skelne mellem information og debat, dvs. mellem fakta og fiktion.

Matematikmodeller er eksempler på kvantitativ litteratur, der ligesom kvalitativ litteratur har tre genrer: fakta, fiktion og fidus. De tre genrer kan eksemplificeres med tre påstande: ‘DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger København lavt'; 'HVIS København lå i alperne, SÅ lå København højt', og 'HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt.'

Fakta er 'DaSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige:

DA prisen er 4 kr./kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr.

Fakta-beregninger kontrolberegnes:

T = 3 kg. á 4 kr./kg. = 3*4 kr. = 15 kr., hov regnefejl, T = 12 kr.

Et eksempel er regnefejlen, som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm + 3 tommer = 5 cm

Fiktion er 'HvisSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige:

HVIS indkomsten er 4 kr./dag, SÅ vil 6 dages indkomst være 6*4 = 24 kr.

Fiktions-beregninger scenarie¬beregnes:

Hvis indkomsten er mellem 4 og 5kr./dag, så vil 3 dages indkomst ligge mellem 12 kr. og 15 kr.

Fidus er 'HvadSå' beregninger, som kvantificerer ikke-kvantificerbare kvaliteter:

Hvis prisen på en gravplads er 10 kr./dag, og prisen på en hospitalsplads er 10.000 kr./dag, så er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet.

Og HVADSÅ, betyder det, at hastighedsgrænsen skal sættes op til 200 km/time for at spare penge? Fidus-beregninger afvises og henvises fra kvantitativ ital-sættelse i talsproget til kvalitativ itale-sættelse i talesproget .

Calculus som opsamling af og opdeling i variable per-tal

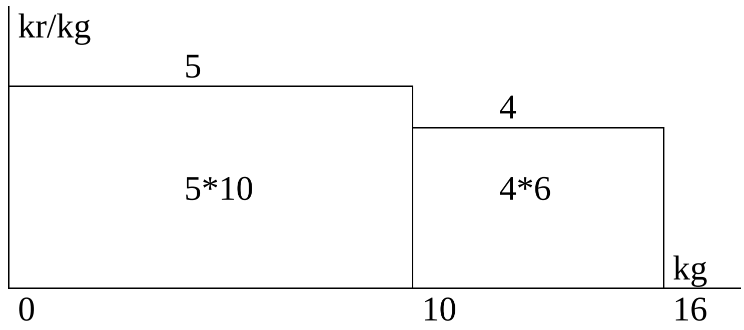
Matematik C bør også give en kort introduktion til matematik B, som hedder calculus internationalt, og som omhandler den fjerde og sidste foreningsteknik, forening af variable per-tal. Et eksempel er gennemsnitsregning: Hvis prisen er 5 kr/kg for de første 10 kg og derefter 4 kr/kg, hvad er så prisen ved køb af 16 kg?

Algebraisk opstilles en nota med tre linjer, som gir svaret p = (5*10+4*6)/(10+6) kr/kg. Geometrisk ses, at per-tal forenes som arealet under per-tals kurven, dvs. som Σ p*Δx, hvilket TI.82 skriver som ∫ p dx.

I dette eksempel er per-tallet stykkevis konstant. Calculus omhandler variable per-tal, som kan betragtes som lokalt konstante, dvs. uden spring. Men stadig sker foreningen ved at finde arealet under per-tals kurven.

10 kg á 5 kr/kg giver 10*5 = 50 kr
6 kg á 4 kr/kg giver 6*4 = 24 kr

16 kg á ? $/kg giver 50+24 kr



Konklusion

Brug af en formelregner på matematikkens C niveau giver en naturlig arbejdsdeling mellem menneske og teknologi. Mennesket udvælger tabeller og beder teknologien om at modellere tabellen med en formel. Mennesket stiller de spørgsmål til de indgående variable, som teknologien så giver svaret på, svar som til sidst skal evalueres af mennesket for at se, om der er behov for at modificere modelleringen.

For at kommunikere med teknologien skal mennesket naturligvis kende betydningen af de taster, der bruges: hvordan tal er opbygget som polynomier, hvordan regnearter forudsiger resultatet af frem- eller tilbageregning, hvordan tal og regnearter kan kombineres til formler, hvordan formler med 1 ubekendt kaldes ligninger som kan løses; og med 2 ubekendte kaldes funktioner, som kan grafes, i begge tilfælde ved at indtaste formlens venstre og højre side hver for sig.

At samarbejde med en formelregner om at foretage kvantitativ modellering er let at lære. Om det så er matematik, man lærer, er et andet spørgsmål, som dog må besvares bekræftende, hvis matematik C niveauets formål er at formidle formel-kompetence, dvs. evne til at bruge de to grundlæggende kompetencer, at tælle og at regne, til beskrivelse af det naturlige faktum Mange.

Materiale

CAS-baseret modelmatematik er afprøvet på to matematik C klasser, og hver gang bestod stort set alle. Materialet er publiceret og kan hentes gratis på http://mellemskolen.net/materiale/gymnasiet/. Der er et teori-kompendium samt et projekt-kompendium med modeller for bl.a. prognoser, befolkningsvækst og fødevarevækst, golf, indsamling, kørsel og kursudsving ved overtagelsesforsøg. Samme sted findes også gratis kompendier til B- og A-niveauet. Endelig findes der som sagt en vejledning som video på YouTube.