C

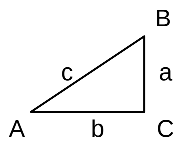
Matematik – naturvidenskaben om Mange

Formel-regning med formelregner TI-82

Algebra

?+3 = 15	?*3 = 15	?^3 = 125	3^? = 243
x+3 = 15 x = 15 – 3	x*3 = 15 $x = \frac{15}{3}$	x^3 = 125 $x = \sqrt[3]{125}$	3^x = 243 $x = \frac{\log 243}{\log 3}$
+ ↔ –	* ↔ /	eksp ↔ rod	gr.tal ↔ log

Geometri



A + B = 90

c^2 = a^2 + b^2

$\sin A = \frac{a}{c}$

$\cos A = \frac{b}{c}$

$\tan A = \frac{a}{b}$

Kompendium

- vejen til effektiv læring

Læring formidler viden til hjerner. Et menneske har tre hjerner: en til rutiner, en til følelser og en til mening.

Som naturvidenskab om mange får matematik mening. Og mening giver den lærende lyst til at lære faget ved selv at opbygge rutiner gennem træning.

Matematik forudsiger tals ændring med formler, og består af to hovedområder:

Geometri måler trekanters længder, vinkler og arealer.

Algebra genforener tal med de 2x4 regningsarter

Opsamling: +, *, ^ og ∫

Opdeling: – , /, √ & log og d/dx

Kompendiet medtager matematikkens historie og fagets betydning som et forudsigelses-sprog, der skabte grundlaget for, at et moderne samfund kan opbygges på baggrund af naturvidenskab om stof i rum og tiden.

Kompendiet indeholder en introduktion til matematik-modeller, den kvantitative litteratur.

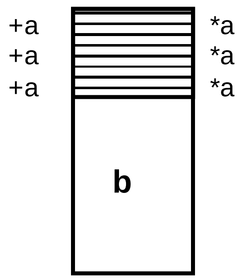
I kompendiet oplever den lærende hele tiden matematik som forudsigelse, der kan testes ved afprøvning.

Kompendiet anvender formelregneren TI-82.

Kompendier til A, B og C samt projektforslag findes på Mellemskolen.net.

PLUSvækst **GANGEvækst**

b + a*n = y = b * a^n



Teori, opgaver og projekt

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Version C2011.1

Matematik forudsiger

Matematik
  Algebra
    Opdeler og genforener tal
  Geometri
    Opmåler jord-former
  Statistik
    Reducerer mange tal til to
	Matematik består af to hovedområder: algebra og geometri samt statistik
	Algebra (regning) forudsiger optælling, enten slut- eller enkelt-tallene.
	Geometri (jordmåling) opmåler plane figurer eller rumlige former.
	Statistik (tælling) beskriver talmængders midte og spredning.

Algebra betyder genforening på arabisk. Algebra kan oversættes til regning. Algebra giver svaret på spørgsmålene: Hvordan forenes enkelt-tal til en total? Hvordan opdeles en total i enkelt-tal?

Geometri betyder jordmåling på græsk. Algebra og geometri opstod som svar på de to grundlæggende spørgsmål: Hvordan deler vi jorden og det den producerer?

Oprindeligt brødfødte mennesker sig som andre dyr, som jægere og samlere.

Det første kulturskift sker med indførelse af agerbrugskultur i varme floddale, hvor alt kunne produceres, specielt peber og silke. Højlandsfolket havde ingen varer at bytte med, kun bjergenes ædelmetaller, især sølv.

Sølvminerne uden for Athen finansierede den græske kultur og det græske demokrati. Sølvminerne i Spanien finansierede det romerske imperium, som brød sammen, da minerne erobredes først af vandaler siden arabere.

Sølvets forsvinden hensætter Europa i 'mørk' middelalder. Indtil der findes en sølv-dal i Harzens bjerge (dollar = thaler). Handelsvejene genopstår og financierer italiensk renæssance og tyske fyrstendømmer. Italiens rigdom udlånes gennem banker, hvilket fører til rentesregning.

Handelen formidles igen af arabere, som udvikler den græske geometri til trigonometri, indfører en ny regnekunst, algebra. Og erstatter romertal med arabertal, som kan udganges:

XXVII*LXIV = 27*64 = (20+7)*(60+4) = 1200 + 80 + 420 + 28 = 1728 = MDCCXXIII.

Den græske geometri opstod da Pythagoras opdagede formler, som kunne bruges til at forudsige lyde og former. For at skabe vellyd skal strengens længde have bestemte tal-forhold. I retvinklede trekanter er to sider frie, men den tredie kan forudsiges af Pythagoras' læresætning: a^2 + b^2 = c^2. Pythagoras overfortolkede sin succes ved at hævde: Alt er tal.

I Athen blev filosoffen Platon inspireret af Pythagoras til at oprette et akademi, som byggede på den tro, at alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som f.eks. geometrien, der kunne udledes som eksempler på metafysiske aksiomer. 'Kom kun ind hvis du kender geometri' skrev Platon over akademiets indgang.

Platon fandt ikke flere formler. Og hans akademi blev omdannet til kirkens klostre, der senere blev omdannet til vore dages universiteter, stadig med lange gange med celler, hvor kommentatorer kommenterer hinandens kommentarer.

Den næste formel blev fundet i Italien af Galilei, som målte strækning s og tid t for et skråt fald på et skråplan og fandt at s=½*g*t^2. Italien gik dog fallit, fordi prisen for peber faldt til 1/3 i Lissabon, da portugiserne opdagede den anden vej til Indien rundt om Afrika, og herved kunne springe de arabiske mellemhandlere over. Spanien forsøgte at finde en tredje vej til Indien: Ved at sejle mod vest opdager de Vestindien, hvor der hverken er peber eller silke, men til gengæld rigeligt med sølv, argentum, f.eks. i sølvlandet Argentina.

Englænderne stjæler de spanske sølvflåder og forsøger at finde en fjerde vej til Indien, over havet uden landkending. Her skal man sejle efter månen, og man spurgte derfor: Hvordan bevæger månen sig?

Kirken sagde: Mellem stjernerne. Newton sagde: NEJ. Månen falder mod jorden ligesom æblet.

Hvorfor falder æblet til jorden? Kirken sagde: Det er en metafysisk vilje, som sker i himlen som på jorden. Og Herrens vilje er uberegnelig, så alt hvad du kan gøre er at tro, gå i kirke og lære at bede. Newton sagde: NEJ. Det er en fysisk vilje, som sker overalt. Men denne vilje, tyngdekraften, er beregnelig, da den kan sættes på formel. Så alt hvad du skal gøre er at vide, gå i skole og lære at regne.

Antikkens fysik sagde: Men kraft skaber bevægelse, og månen har jo ikke ramt jorden? Newton sagde: NEJ, en kraft skaber bevægelsesÆNDRING, så derfor er jeg nødt til at udvikle Δ-regning, som viser, at månen falder så skævt, at jorden er krummet væk inden den rammer, hvorfor månen udfører et evigt fald rundt om jorden.

Brahe brugte sit liv på at måle planetpositioner. Kepler fortolkede Brahes data korrekt, men kunne ikke validere sine tre love uden at opsende nye planeter. Newton kunne derimod validere sin tyngdekraft med faldende ting og penduler.

Newtons succes førte til oplysningstiden, hvor man indså, at med formler behøver man ikke mere formynderi fra de to herrer, Herremanden og Vorherre. I stedet kan oplyste mennesker opbygge et demokrati og en industrikultur baseret på formlernes evne til at forudsige naturens adfærd. Og på den varebaserede trekantshandel, der kom med englændernes opdagelsen af, at der var flere penge at tjene på bomuld end på silke, og derfor plantede bomuldsplantager i USA.

I den moderne skole findes groft sagt tre typer fag: NAT-fag som forud-siger naturen med formler, SAM-fag som bagud-siger samfundet med tabeller, og HUM-fag, som (stadig) fortolker bibliotekets tekster.

Regningsarter opsamler og opdeler

Regningsarter bruges til at forudsige totalen T. Der er 2*4 regningsarter til opsamling af/opdeling i forskellige typer tal:

Opsamling af Opdeling i	Uens	Ens
Styktal Kr,kg,s	Plus + Minus -	Gange * Division /
Pertal Kr/kg, kr/100kr, %	Integration ∑ Differentiation Δ	Potens ^ Logaritme & rod

a kr og n kr er totalt T kr:	a+n = T
a kr n gange er totalt T kr:	n*a = T
r % n gange er totalt T%:	(1+r)^n = 1+T
a1 kg á p1 kr/kg + a2 kg á p2 kr/kg er totalt T kr:	
p1*a1+ p2*a2 = T:	∑ p*a = T

Algebra betyder at samle eller genforene på arabisk. Algebra kan oversættes til regning, forudsigelse. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan kan vi forudsige optællingen af enkelttal til en samlet total? Der er fire måder at opsamle enkelttal på: plus (+), gange (*), potens (^) og integration (∑).

Plus + bruges til at forudsige opsamling af uens enkelttal:
2kr og 3 kr og 4 kr er totalt T kr: 2+3+4 = T

Gange * bruges til at forudsige opsamling af ens enkelttal:
2kr + 2kr + 2kr + 2kr + 2kr = 5 gange 2kr = T, 5*2 = T

Job	Optæl	Forudsig
32kr og 63 kr	1,2,…,95	T = 32+63
2kr 36 gange	2,4, …,72	T=72*2
20% 5 gange	120, 144…	T=120%^5

Potens ^ bruges til at forudsige opsamling af ens procenttal: 5 gange 2% er totalt T%, 102%^5 = 1+T

Integration ∑ eller ∫ bruges ved opsamling af forskellige per-tal:

2kg á 7kr/kg + 3kg á 8kr/kg er totalt T kr: 7*2 + 8*3 = T , ∑ kr/kg * kg = T , ∫ p*dx = T

Omvendte regningsarter findes til alle regningsarter, og bruges til at opdele en total i enkelttal.

x+3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som plusset med 3 giver 15?
x = 15-3	Forudsigelse: 15-3 er det tal, som plusset med 3 giver 15. Test: 3+(15-3) = 15
Regel	**Plus-tal overflyttes som minus-tal, og omvendt**

x*3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som ganget med 3 giver 15?
$x = \frac{15}{3}$	Forudsigelse: $\frac{15}{3}$ er det tal, som ganget med 3 giver 15. Test: $3*\frac{15}{3} = 15$
Regel	**Gange-tal overflyttes som divisions-tal, og omvendt**

x^3 = 125	Spørgsmål: Hvad er det tal, som opløftet i 3de giver 15?
$x = \sqrt[3]{125}$	Forudsigelse: $\sqrt[3]{125}$ er det tal, som opløftet i 3de giver 15. Test: $\sqrt[3]{125}$ ^3= 125
Regel	**Eksponent overflyttes som rod og omvendt**

3^x = 243	Spørgsmål: Hvad er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243?
$x = \frac{\log 243}{\log 3}$	Forudsigelse: $\frac{\log 243}{\log 3}$ er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243. Test: 3 ^ $\frac{\log 243}{\log 3}$ = 243
Regel	**Grund-tal overflyttes som logaritme, og omvendt**

Et blandet regnestykke indeholder flere regnestykker, men kan reduceres til et enkelt regnestykke ved at sætte en skjult parentes om det stærkeste regnestykke:

T = 2+3*4 = 2+(3*4) , T = 2+3^4 = 2+(3^4) , T = 2*3^4 = 2*(3^4) <u>Prioritet: 1. (), 2.^, 3. *, 4. +</u>

Formel-formular (lignings-skema) kan bruges til dokumentation af ligningsløsning

Her skrives det ukendte tal	c = ?	T = a+b*c	*Her skrives formlen*
Her skrives de kendte tal	a = 2	14 = 2+(3*c)	*Fra dobbelt til enkelt regnestykke med skjult parentes*
	b = 3	$\frac{(14-2)}{3} = c$	*+ over flyttes som det modsatte, - og * som det modsatte, /*
	T = 14		*Parentes om det regnestykke, der var i forvejen*
		4 = c	*Løsningen beregnes*
Her udføres test	Test	14 = 2+3*4	'MATHSolver 0 = Y1-Y2, Y1=14, Y2= 2+3*x' giver 'x = 4'
		14 = 14 ☺	Grafisk kontrol ved CALC Intersection Y1 = Y2.

Opgaver

Find det ukendte tal. Lav flere opgaver med randM (3,1)

1. T = a+b*c	5. T = a-b*c
2. T = a+b/c	6. T = a-b/c
3. T = a*b^c	7. T = a/b^c
4. T = a+b^c	8. T = a-b^c

	T	b	a	c
I	60		12	20
II	60	1.5		20
III	60	1.5	12	

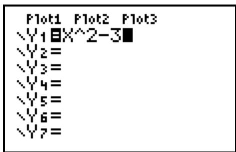
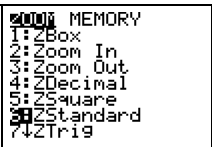
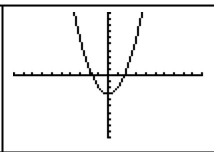
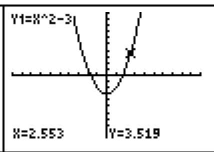
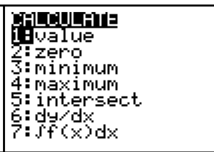
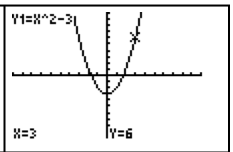
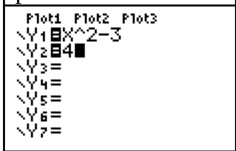
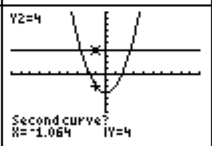
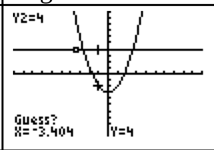
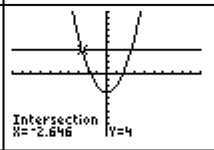
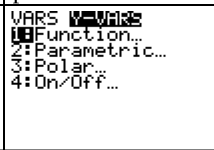
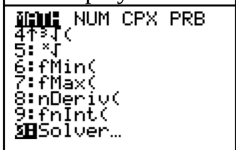
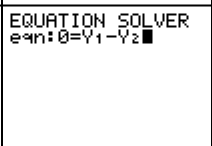
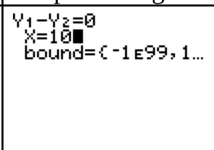
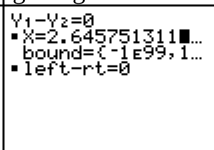
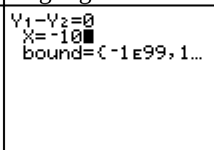
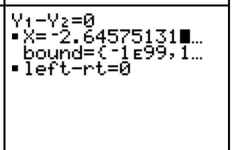
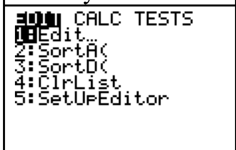
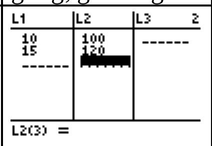
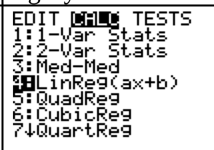
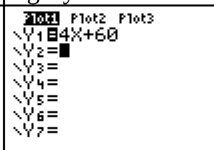
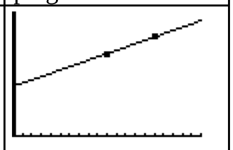
Formler og ligninger

En formel består af et regnestykke og et tal der udregnes, f(x) = y **En ligning** er en formel med 1 ubekendt. En ligning kan løses. **En funktion** er en formel med 2 ubekendte y 0 f(x). En funktion kan tabellægges og grafes som scenarier: Hvis x = a så er y = f(a) osv.	Indkøbs-formlen : b kr + x kg á a kr/kg er totalt y kr: b + x * a = y Udbytte-formlen: b kr.+a kr delt mellem x personer er totalt y kr: b + a / x = y

En formel består af et regnestykke og et tal der udregnes, y = f(x,z,t). En formel kan indeholde 1, 2, 3 eller flere variable (ubekendte). Erstattes variabler med faste tal forvandles formlen til en ligning eller en funktion.

En ligning er en formel med 1 ubekendt:
y = 10 + 2*3, eller 16 = b + 2*3, eller 16 = 10 + a*3, eller 16 = 10 + 2*x.
En ligning løses manuelt eller ved at bruge formelregnerens MATHSolver Y1-Y2 = 0, hvor venstre side indtastes som Y1 og højre side som Y2 på Y-listen.
Løsningen testes ved at indsætte alle kendte tal: 16 = 10 + 2*3 gives 16 = 16

En funktion er en formel med 2 ubekendte:
y = b + 2*3, eller y = 10 + 2*x, eller 16 = b + 2*x, eller 16 = 10 + a*x
I en funktion isoleres en af de ubekendte, hvis formel indtastes på y-listen: x^2-y+3 = 0 gir y = x^2-3 = Y1.

					
Formler indtastes på Y-listen	Begynd altid med Standard Zoom	Vælg Graph for at grafe	Vælg Trace for scenarier	Calc Value giver præcise værdier	Og bruges til x-kendt/y-ukendt
					
x-ukendt/y-kendt klares på y-listen	De skærende kurver markeres	Cursor anbringes tæt på løsningen	Proceduren gentages	VARS giver adgang til Y-erne	Det kendte x skrives efter Y
					
MATHSolver finder y'erne	Indtastes kun én gang, genbruges	Indtast et x-gæt og tryk SOLVE	Løsningen tættest på gættet vises	Indtast et nyt gæt og tryk SOLVE	Løsningen tættest på gættet vises
					
Fra tabel til formel med STAT	Indtast tabellen som liste	Vælg formeltype (regression)	Tilføj Y1 sender formlen til y-list	Plot giver visuel kontrol	Tilpas vinduet før der grafes

Opgaver: Find svarene på 3 måder: med formel-skema, grafisk og med lommeregner.

1

x	y = 3+2*x
-3.7	?
-2.4	?
3.1	?
4.5	?
?	-3.7
?	-2.4
?	3.1
?	4.5

2

x	y = 3-2*x
-3.7	?
-2.4	?
3.1	?
4.5	?
?	-3.6
?	-2.5
?	3.2
?	4.6

3

x	y = x^2-4
-3.7	?
-2.4	?
3.1	?
4.5	?
?	-3.8
?	-2.2
?	3.7
?	4.7

4

x	y = -x^2+5
-3.7	?
-2.4	?
3.1	?
4.5	?
?	-3.2
?	-2.6
?	3.3
?	4.3

Konstant vækst

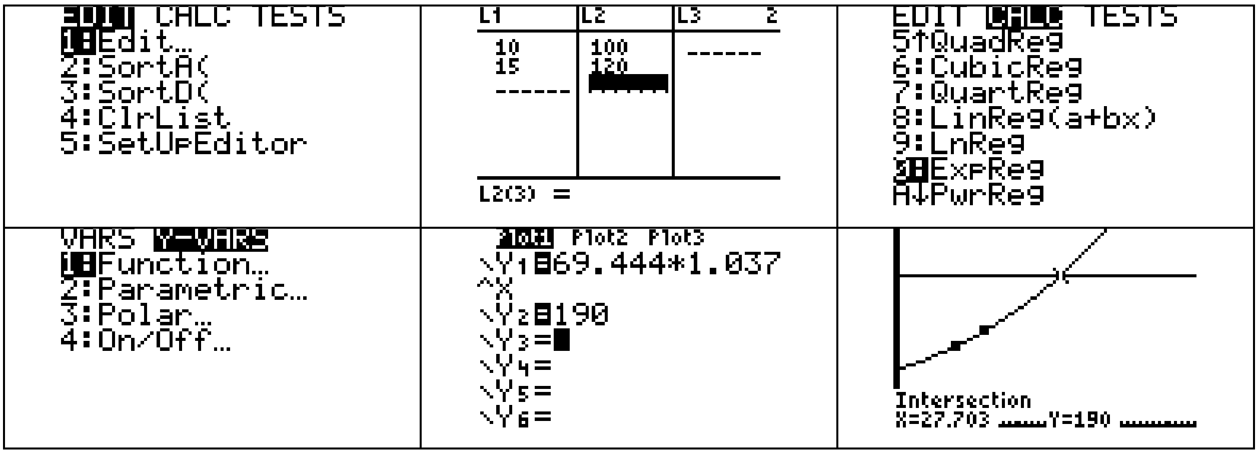
<table>
<tr><th>Tabel</th><th colspan="3">Vækstformer</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

x	y
10	100
15	120
25	?
?	190

</td><td>Lineær ++ vækst</td><td>Eksponentiel +* vækst</td><td>Potentiel ** vækst</td></tr>
<tr><td>y = b+a*x</td><td>y = b*a^x</td><td>y = b*x^a</td></tr>
<tr><td>x: +1 dag
y: +a kr (hældning)</td><td>x: +1 dag
y: +r % (vækstprocent)</td><td>x: +1 %
y: +a % (elasticitet))</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Tallene a og b kan findes ved regression på en formelregner</td></tr>
</table>

I en tabelopgave skal vi opstille en formel ud fra en tabel. Vi kan regne os til formlen eller bruge regression.

Ved regression vælges først STAT EDIT. Herefter indtastes tabellen. Nu vælges STAT CALC og f.eks. ExpReg. Under VARS Y-VARS tilføjes Y1, så regressionsligningen anbringes direkte på y-listen.
På Y-listen tilføjes Y2 = 190, og PLOT1 tændes til visuel kontrol af om kurven går gennem tabellens punktpar.
De stillede spørgsmål kan nu besvares med hhv. TRACE 25 og CALC INTERSECTION.



De stillede spørgsmål kan også besvares med formelskemaer:

y = ?	$y = 60+4\cdot x$
x = 25	$y = 60+4\cdot 25$ $y = 160$
x = ?	$y = 60+(4\cdot x)$
y = 180	$y-60 = 4\cdot x$ $\frac{y-60}{4} = x$ $\frac{180-60}{4} = x$ $30 = x$

y = ?	$y = 69.44\cdot 1.037\text{^}x$
x = 25	$y = 69.44\cdot 1.037\text{^}25$ $y = 172.80$
x = ?	$y = 69.44\cdot(1.037\text{^}x)$
y = 180	$\frac{y}{69.44} = 1.037\text{^}x$ $\frac{\log\left(\frac{180}{69.44}\right)}{\log(1.037)} = x$ $26.21 = x$
Test	180 = 69.44*1.037^26.21 180 = 179.958 ☺

y = ?	$y = 35.48\cdot x\text{^}0.450$
x = 25	$y = 35.48\cdot 25\text{^}0.450$ $y = 151.03$
x = ?	$y = 35.48\cdot x\text{^}0.450$
y = 180	$\frac{y}{35.48} = x\text{^}0.450$ $\sqrt[0.450]{\frac{180}{35.48}} = x$ $36.92 = x$
Test	180 = 35.48*36.92^0.450 180 = 179.991 ☺

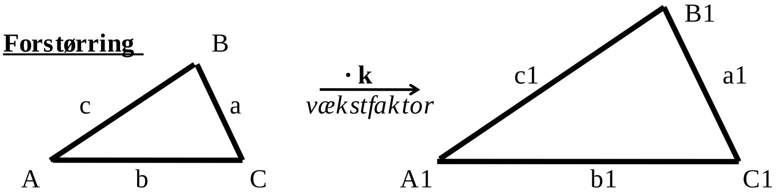
Opgaver

1	x	10	20	30	
	y	30	50		80
2	x	10	15	25	
	y	100	130		180
3	x	10	20	35	
	y	60	40		10
4	x	10	20	40	
	y	100	70		10

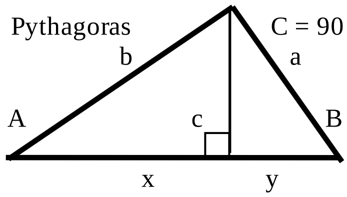
Svar:	a	b	Forskrift	y	x	T
lin	2	10	y = 10+2*x	70	35	
exp	1,052	18	y = 18*1,052^x	83,33	29,2	13,6
pot	0,737	5,5	y = 5,5*x^0,737	67,41	37,84	
lin	6	40	y = 40+6*x	190	23,33	
exp	1,054	59,17	y = 59,17*1,054^x	219,7	21,2	13,2
pot	0,647	22,54	y = 22,54*x^0,647	180,92	24,8	
lin	-2	80	y = 80+-2*x	10	35	
exp	0,96	90	y = 90*0,96^x	21,77	54,19	-17,1
pot	-0,585	230,74	y = 230,74*x^-0,585	28,83	213,92	
lin	-3	130	y = 130+-3*x	10	40	
exp	0,965	142,86	y = 142,86*0,965^x	34,3	74,56	-19,4
pot	-0,515	327,02	y = 327,02*x^-0,515	49	877,72	

Rette trekanter

Forstørring



Pythagoras



$\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ $\cos B = \frac{y}{a} = \frac{a}{c}$

$b^2 = x \cdot c$ $a^2 = y \cdot c$

$a^2 + b^2 = y \cdot c + x \cdot c$

$a^2 + b^2 = (y + x) \cdot c = c \cdot c = c^2$

Ved forstørring af en trekant forstørres siderne. Vinklerne forbliver uændret. Trekanterne kaldes derfor ensvinklede.

$\boxed{\mathbf{a1 = k \cdot a \quad b1 = k \cdot b \quad c1 = k \cdot c}}$

$\boxed{\mathbf{\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b} = \frac{c1}{c} = k}}$

a1 = ?	$\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b}$
a=10 b=12 b1=15	$a1 = \frac{a \cdot b1}{b}$ $a1 = \frac{10 \cdot 15}{12}$ a1= 12.5

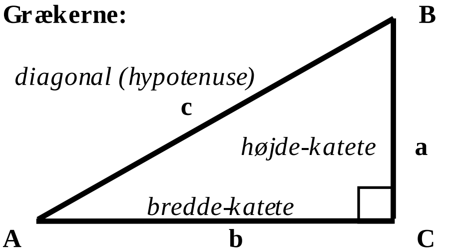
a = ?	$\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b}$
a1=10 b=12 b1=15	$a1 = \frac{a \cdot b1}{b}$ $\frac{a1 \cdot b}{b1} = a$ $\frac{10 \cdot 12}{15} = a$ 8 = a

k = ?	b1 = k·b
b1=15 b=12	$\frac{b1}{b} = k$ $\frac{15}{12} = k$ 1.25 = k 125% = k

Trigonometri

I trekantsregning beregnes trekantens 3 ukendte stykker (vinkler, sider) ud fra de 3 kendte stykker.

Grækerne:

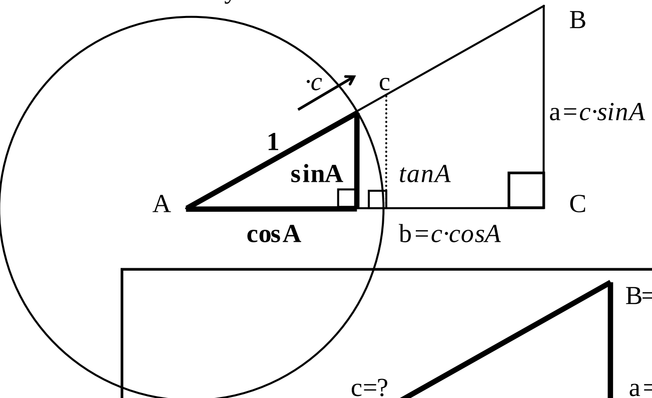


Ligninger

A+B = 90	A+B+C=180
$\mathbf{a^2+b^2 = c^2}$	Pythagoras

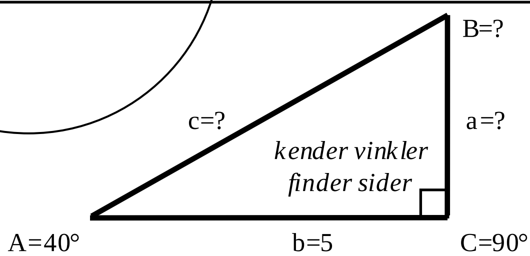
Grækernes regneproblem: Ligningerne indeholder to ubekendte

Araberne: Inde i hver stor trekant er en lille standardtrekant med diagonallængde 1, som navngives og tabellægges. SinA synes fra A. CosA er hos A.



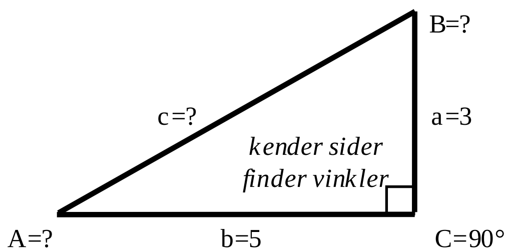
sin A	$= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{mod}{hyp}$	= cos B	
cos A	$= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{hos}{hyp}$	= sin B	
tan A	$= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{mod}{hos}$	$= \frac{\sin A}{\cos A}$	$= \frac{a/c}{b/c}$

En højde opdeler en ikke-retvinklet trekant i to retvinklede



a = ?	$\tan A = \frac{a}{b}$
A = 40 b = 5	b·tanA = a 5·tan40 = a **4.195 = a**

c = ?	$\cos A = \frac{b}{c}$
A = 40 b = 5	c·cosA = b $c = \frac{b}{\cos A}$ **c = 6.527**



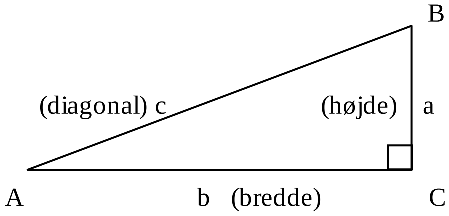
A = ?	$\tan A = \frac{a}{b}$
a = 3 b = 5	$A = \tan^{-1} \frac{a}{b}$ $A = \tan^{-1} \frac{3}{5}$ **A = 30.96**

c = ?	$a^2+b^2 = c^2$
a = 3 b = 5	$\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ $\sqrt{(3^2 + 5^2)} = c$ $\mathbf{5.831 = \sqrt{34} = c}$

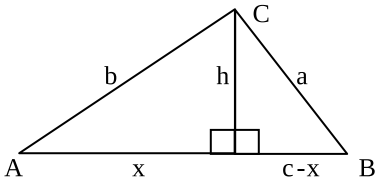
Ikke-rette trekanter

Ethvert jordstykke kan opdeles i trekanter Enhver trekant kan opdeles i 2 retvinklede trekanter	To Græske formler: A+B+C = 180 a^2 + b^2 = c^2 Tre Arabiske formler: $\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\tan A = \frac{a}{b}$

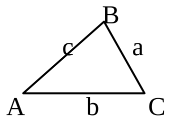
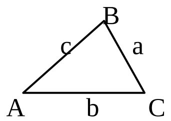
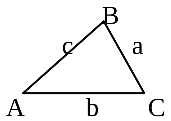
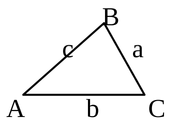
For at kunne tegne en trekant skal man kende 3 stykker (vinkler eller sider), og de sidste 3 stykker kan så forudsiges ved hjælp af 3 formler. Grækerne udviklede kun to formler, hvorfor trekantregning først kunne begynde da araberne kom med yderligere tre formler.

	Græske formler: A+B+C = 180 og a^2 + b^2 = c^2 (Pyhtagoras) Arabiske formler: $\sin A = \frac{a}{c}$ (højde i % af diagonal) $\cos A = \frac{b}{c}$ (bredde i % af diagonal) $\tan A = \frac{a}{b}$ (højde i % af bredde)

For at kunne regne på en ikke retvinklet trekant, opdeles den i to retvinklede trekanter ved hjælp af en højde h:

Hvis C er 90 gælder $\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ og $\cos B = \frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$ dvs. b^2 = xc og a^2 = c^2-xc dvs. a^2 +b^2 = c^2 (Pythagoras)	**Sinus-relationer:** Af venstre og højre trekant fås: $\sin A = \frac{h}{b}$ og $\sin B = \frac{h}{a}$ b*sinA = h og a*sinB = h b*sinA = a*sinB eller ved overflytning $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ Sidste del fra anden højde.	**Cosinus-relationer:** b^2 = h^2+x^2, dvs. h^2 = b^2-x^2 a^2 = h^2+(c-x)^2, dvs. h^2 = a^2-(c-x)^2 solve(a^2-(c-x)^2 = a^2-x^2,x) giver $x = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2*c}$ eller 2*c*x = -a^2+b^2+c^2 $\cos A = \frac{x}{b}$, dvs. b*cosA = x, som indsat giver a^2 = b^2+c^2 – 2*b*c*cosA. Tilsvarende fås b^2 = a^2+c^2 – 2*a*c*cosB og c^2 = b^2+a^2 – 2*b*a*cosC

De fire trekantstilfælde:

VSV: Vinkel Side Vinkel A=32 b=8 C=71 	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 32+B+71, Y2 = 180 B = 77	Solve Y1-Y2 = 0 $Y1 = \frac{a}{\sin 32}$, $Y2 = \frac{8}{\sin 77}$ a = 4.351	Solve Y1-Y2 = 0 $Y1 = \frac{c}{\sin 71}$, $Y2 = \frac{8}{\sin 77}$ c = 7.763
SVS: Side Vinkel Side c=7 A=41 b=9 	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = a^2 Y2 = 9^2+7^2 – 2*9*7* cos41 a = 5.908	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 9^2 Y2 =5.9^2+7^2-2*5.9 *7*cosB B = 88.0	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 41+88+C, Y2 = 180 C = 51
SSS: Side Side Side a=5 b=8 c=6 	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 5^2 Y2 = 8^2+6^2 – 2*8*6* cosA A = 38.6	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 8^2 Y2 = 5^2+6^2 – 2*5*6 *cosB B = 92.9	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 38.6+92.9+C, Y2 = 180 C = 48.5
VSS: Vinkel Side Side A=28 b=11 a=9 	Solve Y1-Y2 = 0 $Y1 = \frac{11}{\sin B}$, $Y2 = \frac{8}{\sin 77}$ B = 35.0 og B = 145.0	Solve Y1-Y2 = 0 Y1 = 28+35+C=180, Y2 = 180 C = 117 Y1 =28+145+C=180, Y2 =180 C = 7	Solve Y1-Y2 = 0 $Y1 = \frac{c}{\sin 117}$, $Y2 = \frac{9}{\sin 28}$ c = 17.081 $Y1 = \frac{c}{\sin 7}$, $Y2 = \frac{9}{\sin 28}$ c = 2.336

Opgaver: Brug formel-formular og husk at teste løsningen. Brug randMat(1,3) til at frembringe 3 tal til flere opgaver.

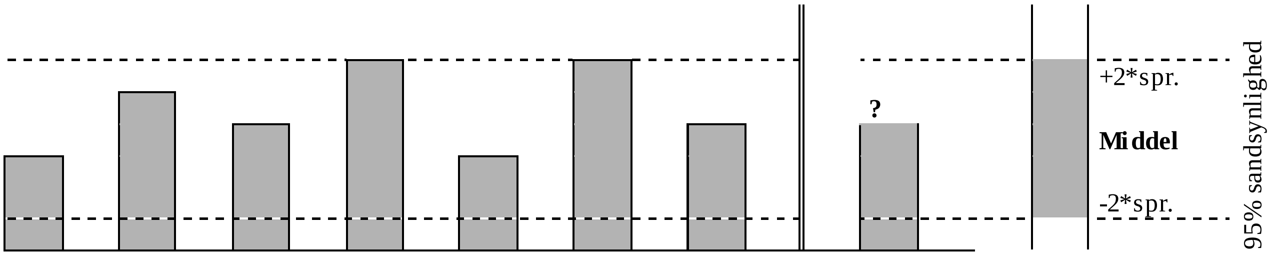
1. Beregn de tomme felter

	A	B	C	a	b	c
1	32	63		25		
2	47		69		47	
3	36			12	15	
4		67		14		23
5			34	18		25
6				12	15	19
7	37		90		12	
8			90	14	16	

2. Hvordan flyttes en ting hurtigst fra et punkt i et område til et punkt i et andet område, når vi bevæger sig med forskellig hastighed i de to områder?
3. Bestem højden af en høj ting (en flagstang) på to forskellige måder: Den lette, hvor vi kan komme helt hen til tingen, og den svære, hvor vi ikke kan.
4. Tip en plade 30 grader og indtegn en vej op, der højst må stige 20 grader (en 'hårnåle' -vej). Gentag øvelsen med andre gradtal. Hvor meget øges tyngdens træk i en bil, når vejens stigning øges med 10 grader?

Statistik

Nogle tal er forudsigelige, andre uforudsigelige. Uforudsigelige tal kaldes tilfældige tal, random-tal eller stokastiske tal.
Stokastiske tal kan dog som regel 'bagud-siges' ved at opstille en statistik over deres hidtidige adfærd.
I tabellen opstilles de observerede tal samt hvor hyppigt de enkelte tal er forekommet.
Ordnes observationerne i voksende rækkefølge vil
Median = den midterste observation, 1. (3.) kvartil = den midterste observation i 1. (2.) halvdel.
Et histogram viser de enkelte observationers hyppigheder eller frekvenser.
En sumkurve viser den kumulerede frekvens, hvoraf median og kvartiler kan aflæses.



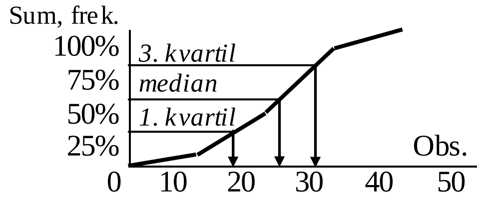
Statistik *Sandsynlighed*
Bagud-sige: Middeltal, spredning *Forud-sige x = Middeltal ± 2·spredning*

1. Observationer
x: 10, 12, 22, 12, 15, ...

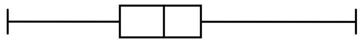
2. Grupper og optalte hyppigheder

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Sum. frek.
x	h	p	∑p
0-10	3	3/40=0.075	0.075
10-20	12	0.300	0.375
20-30	18	0.450	0.825
30-50	7	0.175	1.000
Total	40	1.000	

Sumkurve



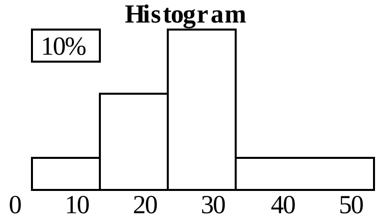
Et **Boksplot** indeholder median og kvartiler samt mindste og største observation.



3. Middeltal eller gennemsnit M: Hvis alle observationer var ens ... men de afviger

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Summ. frek.	Middeltal
x	h	p	∑p	m = ∑x·p
0-10	3	3/40=0.075	0.075	5·0.075=0.375
10-20	12	0.300	0.375	4.5
20-30	18	0.450	0.825	11.25
30-50	7	0.175	1.000	7
Total	40	1.000		23.1

Histogram



4. Varians, spredning S: Hvis alle afvigelser var ens ...

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Summ. frek.	Middeltal	Afvigelse	Varians V = S^2
x	h	p	∑p	m = ∑x·p	|x - m|	v = ∑(x-M)^2·p
0-10	3	3/40=0.075	0.075	5·0.075=0.375	|5-23.1|=18.13	18.13^2·0.075 = 24.64
10-20	12	0.300	0.375	4.5	8.13	19.80
20-30	18	0.450	0.825	11.25	1.88	1.58
30-50	7	0.175	1.000	7	16.88	49.83
Total	40	1.000		23.1		S^2 = 95.86

Spredning S = √95.86 = 9.8

5. Forudsigelse: x = Middeltal ± 2·spredning = m ± 2·s = 23.1 ± 19.6 *Konfidens-interval* = [3.5 ; 42.7]

6. På grafisk lommeregner indtastes intervalmidtpunkter under STAT. Frekvens = hyp/sum(hyp). KumFrek = cumsum(frek).

Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.
0	2	.05	.050
1	5	.125	.175
2	9	.225	.400
3	12	.300	.700
4	8	.200	.900
5	4	.100	1.000

Man kan nu beregne forskellige tal ved hjælp af 1-var statistik:
Middeltal, gennemsnit, m = 2.8
Spredning, s = 1.3
Konfidens-interval = m ± 2*s = [0.2; 5.4]
1. kvartil = 2
Median = 3
3. kvartil = 4

Middeltal, gennemsnitstal, forventningstal: Hvis alle observationer var ens. Det er de ikke, de er spredt.
Spredning: Hvis alle spredninger var ens (i forhold til middeltallet).
Konfidens-interval: Omfatter ca. 95% af observationerne, kan bruges til at forudsige nye observationer med.

Polynom-kurver

1. grads polynomium fastlægger højde	y = 5
2. grads polynomium fastlægger højde + stigning	y = 5 + 2*x
3. grads polynomium højde + stigning + krumning	y = 5 + 2*x + 0.3*x^2
4. grads polynomium fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning	y = 5 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3

Krumme polynom-kurver med højere grad end 1 har en række interessante punkter:

Vendepunkter, enten top-punkt (maximum) eller bund-punkt (minimum).

Skæringspunkter med x-akse (nulpunkter), med y-akse (start-punkt), og med andre kurver.

Skæringspunkter med vandrette linier (ligningsløsning), og med lodrette linier (værdier).

Krumningsskift, hvor krumningen skifter fortegn.

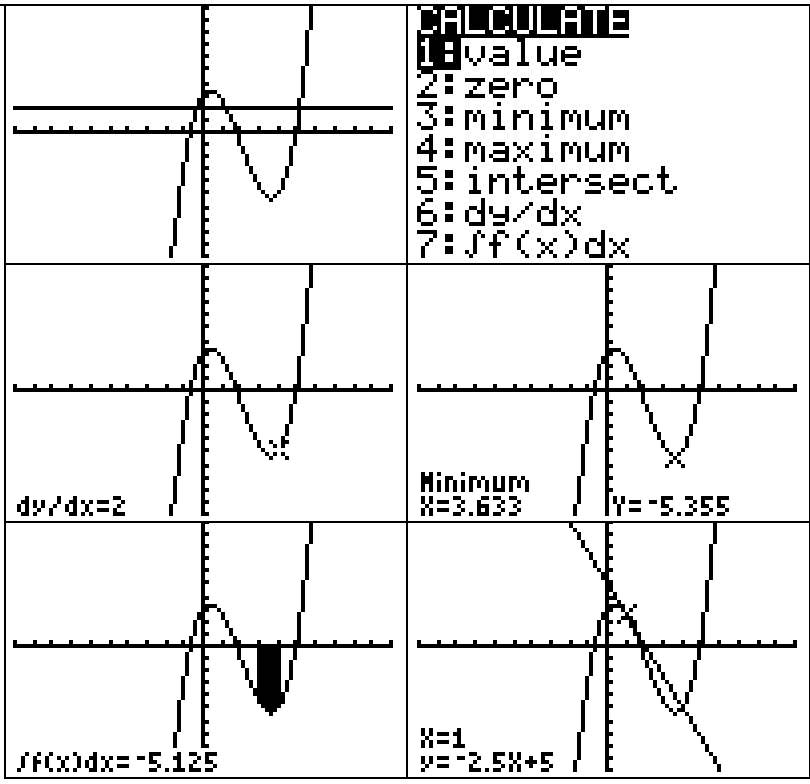
Tangent-punkt. En tangent er en ret linie, der er praktisk taget sammenfaldende med kurven omkring røringspunktet. En tangent viser hvordan kurven vil se ud hvis stigningen i punktet forbliver uændret.

Hvis kurven er en pertals-kurve aflæses totalen som arealet under kurven, dvs. ved integration
Hvis kurven er en total-kurve, aflæses pertallet som stigningen på kurven, dvs. ved differentiation.
Krumningen fås ved at differentiere to gange. Ved positiv krumning krummes opad, ved negativ nedad.

Alle disse ting kan aflæses i formelregnerens grafiske vindue og forudsiges ved formelregning

Eksempel: y = 0.5x^3 – 3x^2 + 2x + 3

Skæringspunkt	Aflæst grafisk	Forudsagt ved formel
Med y-akse CALC value	y = 3	y1(0)
Med x-akse CALC zero	x = -0.694 x = 1.748 x = 4.946	Solve(0=Y1)
Med y = 2 CALC intersection	x = -0.329 x = 1.181 x = 5.147	Solve(0=Y1-2)
Toppunkt CALC Maximum	x = 0.367 y = 3.355	MATH fMax(Y1,x,0,7)
Bundpunkt CALC Minimum	x = 3.633 y = -5.355	MATH fMin(Y1,x,0,7)
Stigning i x = 4 CALC dy/dx	2	MATH nDeriv(Y1,x,4)
Areal fra 3 til 4 CALC Sf(x)dx	-5.125	MATH fnInt(Y1,x,3,4)
Tangent i x = 1 DRAW tangent x = 1	y=-2.5x+5	



Opgaver

1. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = 0.7x^3 – 4x^2 + 3x + 4. 2. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = -0.4x^3 + 2x^2 – 0.5x – 3. 3. Fremstil selv polynom-formler ved brug af randM(4,1) under Matrix, Math. Eller ved tabeller og regression. 4. Vis forskellige måder at vokse fra (0,0) til (1,1) ved hjælp af polynomier af 1. grad, 2. grad og 3. grad. 5. Dimensioner billigste kasse uden låg indeholdende 1liter 6. Dimensioner billigste rør uden låg indeholdende 1liter	7. Dimensioner billigste kasse uden låg el. bund indeh. 1 l. 8. Dimensioner billigste rør uden låg el. bund indeh. 1 l. 9. Dimensioner billigste kasse indeholdende 1liter, hvor lågets materiale er dobbelt så dyrt som resten. 10. Som 9, nu blot rør. 11. y1 er et polynomium af grad 0. Hvis y1 er en Totalkurve, hvordan ser pertals-kurven da ud? Hvis y1 er en pertals-kurve, hvordan ser Totalkurven da ud? 12. Som 5 men med polynomium af grad 1. 13. Som 5 men med polynomium af grad 2. 14. Som 5 men med polynomium af grad 3.

Trekantsopgaver

Forstørrelse (ensvinklede trekanter) *svar*

	a	b	c	a'	b'	c'		a	b	c	a'	b'	c'
1	12,340			19,744	23,693	29,616			14,808	18,510			
2	27,148			22,212	14,135	17,164			17,276	20,978			
3		19,744		24,680	28,206	33,494		17,276		23,446			
4		22,212		27,148	18,795	21,927		32,084		25,914			
5			28,382	29,616	32,907	37,843		22,212	24,680				
6			30,850	32,084	23,528	26,737		37,020	27,148				
7	27,148	29,616	33,318	34,552								37,693	42,405
8	41,956	32,084	35,786	37,020								28,309	31,576
9	32,084	34,552	38,254		42,526						39,488		47,082
10	46,892	37,020	40,722		33,123						41,956		36,435
11	37,020	39,488	43,190			51,828					44,424	47,386	
12	51,828	41,956	45,658			41,310					46,892	37,960	

Retvinklede trekanter *svar*

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
13			3,917	33,3		90		2,149	3,275			56,7	
14			6,520	42,5		90		4,401	4,810			47,5	
15			8,423	62,5		90		7,471	3,889			27,5	
16	8,597			51,0		90			6,959	11,061		39,0	
17	9,620			65,9		90			4,298	10,537		24,1	
18	3,787			21,5		90			9,620	10,339		68,5	
19	2,661		4,628			90			3,787		35,1	54,9	
20	3,889		6,266			90			4,913		38,4	51,6	
21	2,763		7,015			90			6,448		23,2	66,8	
22	3,480	6,243				90				7,147	29,1	60,9	
23	2,866	8,597				90				9,062	18,4	71,6	
24	8,597	8,085				90				11,802	46,8	43,2	
25	7,471	6,959			43,0	90				10,210	47,0		
26	6,652	3,991			31,0	90				7,758	59,0		
27		4,503			30,7	90		7,574		8,811	59,3		
28		5,527			32,7	90		8,597		10,220	57,3		
29			8,864		58,7	90		4,606	7,574		31,3		
30			9,560		52,4	90		5,834	7,574		37,6		

Ikke retvinklede trekanter *svar*

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
31	1,075			33,3		122,8			0,794	1,646		23,9	
32	2,212			42,5		133,1			0,252	2,392		4,4	
33	3,736			62,5		88,2			2,060	4,209		29,3	
34		4,372		51,0		76,8		4,298		5,383		52,2	
35		1,437		65,9		98,2		4,810		5,214		15,8	
36		4,903		21,5		87,0		1,893		5,162		71,5	
37			2,154	35,1		68,6		1,330	2,249			76,3	
38			2,256	38,4		46,1		1,945	3,118			95,6	
39			2,568	23,2		47,1		1,382	3,302			109,7	
40	1,740	3,541				68,6				3,327	29,1	82,3	
41	1,433	4,346				88,0				4,528	18,4	73,6	
42	4,298	5,724				57,3				4,966	46,8	75,9	
43		5,092	3,738	47,0				3,736				85,9	47,1
44		2,552	3,818	59,0				3,326				41,1	79,8
45		3,940	3,708	59,3				3,787				63,4	57,3
46	4,298		5,030		42,9				3,479		57,3		79,8
47	4,861		4,437		81,9				6,100		52,1		46,1
48	2,917		4,835		77,3				5,067		34,2		68,6

Statistikopgaver

					MID		SPR	KVT
1	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	10-30	3						
	30-40	5						
	40-50	9						
	50-60	4						
	60-70	2						

svar:

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,130	0,130	2,6	23,0	69,3	
0,217	0,348	7,6	8,0	14,1	35,5
0,391	0,739	17,6	2,0	1,5	43,9
0,174	0,913	9,6	12,0	24,9	50,6
0,087	1,000	5,7	22,0	41,9	
1,000		43,0		151,6	
MID±2·SPR:		*18,4*	*67,7*	12,3	

					MID		SPR	KVT
2	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	0-10	3						
	10-20	9						
	20-30	12						
	30-40	11						
	40-60	4						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,077	0,077	0,4	21,5	35,7	
0,231	0,308	3,5	11,5	30,7	17,5
0,308	0,615	7,7	1,5	0,7	26,3
0,282	0,897	9,9	8,5	20,2	34,8
0,103	1,000	5,1	23,5	56,5	
1,000		26,5		143,8	
MID±2·SPR:		*2,6*	*50,5*	12,0	

					MID		SPR	KVT
3	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	30-40	12						
	40-45	14						
	45-50	16						
	50-55	10						
	55-60	7						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,203	0,203	7,1	10,8	23,7	
0,237	0,441	10,1	3,3	2,6	41,0
0,271	0,712	12,9	1,7	0,8	46,1
0,169	0,881	8,9	6,7	7,6	51,1
0,119	1,000	6,8	11,7	16,2	
1,000		45,8		50,9	
MID±2·SPR:		*31,5*	*60,1*	7,1	

					MID		SPR	KVT
4	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	20-22	2						
	22-24	4						
	24-26	8						
	26-28	5						
	28-32	3						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,091	0,091	1,9	4,4	1,8	
0,182	0,273	4,2	2,4	1,1	23,8
0,364	0,636	9,1	0,4	0,1	25,3
0,227	0,864	6,1	1,6	0,6	27,0
0,136	1,000	4,1	4,6	2,9	
1,000		25,4		6,3	
MID±2·SPR:		*20,4*	*30,4*	2,5	

					MID		SPR	KVT
5	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	0-2	10						
	2-4	22						
	4-6	30						
	6-8	20						
	8-10	6						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,114	0,114	0,1	3,8	1,6	
0,250	0,364	0,8	1,8	0,8	3,1
0,341	0,705	1,7	0,2	0,0	4,8
0,227	0,932	1,6	2,2	1,1	6,4
0,068	1,000	0,6	4,2	1,2	
1,000		4,8		4,8	
MID±2·SPR:		*0,4*	*9,1*	2,2	

					MID		SPR	KVT
6	x	h	p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
	0-20	10						
	20-40	22						
	40-60	30						
	60-100	8						

		MID		SPR	KVT
p	∑p	x·p	|x-M|	(x-M)^2·p	
0,143	0,143	1,4	31,4	141,1	
0,314	0,457	9,4	11,4	41,0	26,8
0,429	0,886	21,4	8,6	31,5	42,0
0,114	1,000	9,1	38,6	170,0	12,5
1,000		41,4		383,7	
MID±2·SPR:		*2,3*	*80,6*	19,6	

Hjemmeregning

1. I trekant ABC er C=90, A=42, c=5. Find resten.
2. I trekant ABC er C=90, A=34, a=6. Find resten.
3. I trekant ABC er C=90, A=28, b=7. Find resten.
4. I trekant ABC er C=90, a=5, c=7. Find resten.
5. I trekant ABC er C=90, b=4, c=7. Find resten.
6. I trekant ABC er C=90, a=4, b=5. Find resten.
7. I trekant ABC er A=32.6, b=4.6, c=5.2. Find resten.
8. I trekant ABC er A=34.8, b=5.6, a=7.2. Find resten.
8. I trekant ABC er A=42.6, B=74.6, c=6.2. Find resten.
10. I trekant ABC er A=34.8, C=54.6, a=5.2. Find resten.

11. (alle lin., exp. & pot.)

x	y
2	10
7	15
9	?
?	30

12

x	y
3	8
7	12
9	?
?	28

13

x	y
1	20
5	30
9	?
?	80

14

x	y
10	80
20	62
30	?
?	30

15

x	y
12	64
18	42
25	?
?	24

16

x	y
3	50
12	28
20	?
?	10

17. I 1993 var der 420 kr. I 1998 var der 630 kr. I 2005 var der ? kr. I ? var der 950 kr. Lin., eksp. & pot. vækst.
18. I 1994 var der 520 kr. I 1998 var der 630 kr. I 2004 var der ? kr. I ? var der 1250 kr. Lin., eksp. & pot. vækst.
19. I 1992 var der 920 kr. I 1996 var der 730 kr. I 2005 var der ? kr. I ? var der 450 kr. Lin., eksp. & pot. vækst.
20. I 1994 var der 720 kr. I 1998 var der 630 kr. I 2004 var der ? kr. I ? var der 250 kr. Lin., eksp. & pot. vækst.

21. En kapital på 753 kr. voksede med 20% 4 gange og blev til ? kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
22. En kapital på 956 kr. mindskedes med 25% 5 gange og blev til ? kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
23. En kapital på 486 kr. voksede med 30% ? gange og blev til 2345.83 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
24. En kapital på 324 kr. mindskedes med 35% ? gange og blev til 25.88 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
25. En kapital på 743 kr. voksede med ?% 4 gange og blev til 2854.32 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
26. En kapital på 896 kr. mindskedes med ?% 5 gange og blev til 45.09 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
27. En kapital på ? kr. voksede med 50% 6 gange og blev til 2423.83 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
28. En kapital på ? kr. mindskedes med 55% 7 gange og blev til 2.45 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?

31.

x	y
2	10
7	30
9	35
12	?
?	30
?	vend

32.

x	y
3	8
7	5
11	12
9	?
?	28
?	vend

33.

x	y
1	20
5	30
7	35
9	?
?	10
?	vend

34.

x	y
10	60
20	120
30	30
40	70
50	?
?	80
?	vend

35.

x	y
12	74
18	22
20	43
25	41
30	?
?	34
?	vend

36.

x	y
3	9
12	28
15	8
17	14
20	?
?	10
?	vend

41. (Mid.tal sumk. & boksplot)

Obs.	Hyp.
0-10	6
10-20	9
20-30	12
30-40	15
40-50	6

42.

Obs.	Hyp.
0-10	50
10-20	20
20-30	10
30-40	20
40-50	30

43.

Obs.	Hyp.
0-10	16
10-20	29
20-30	52
30-40	25
40-50	16

44.

Obs.	Hyp.
0-10	16
10-20	29
20-30	32
30-40	45
40-50	56
50-60	66

45.

Obs.	Hyp.
0-10	12
10-20	56
20-30	42
30-40	13
40-50	73
50-60	25

46.

Obs.	Hyp.
0-10	23
10-20	45
20-30	25
30-40	12
40-50	86
50-60	23
60-70	45

51. Løs ligningen $2 + 3\cdot(1+x)^4 = 20$
52. Løs ligningen $4 + 5\cdot(1+x)^6 = 30$
53. Løs ligningen $40 - 3\cdot(1-x)^4 = 20$
54. Løs ligningen $50 - 4\cdot(1-x)^5 = 10$
55. Omskriv ligningerne $T = d - e$, $T = d - \frac{e}{f}$, $T = d - \frac{e-f}{g}$
56. Omskriv ligningerne $T = \frac{d}{e}$, $T = \frac{d}{e} - f$, $T = \frac{d-e}{f} - g$