



1. MODERNITET OG SELVREPRÆSENTATION, af Povl Gotke
2. WHAT IF MATHEMATICS IS A SOCIAL CONSTRUCTION, af Allan Tarp
3. LINKING MATHEMATICS EDUCATION AND DEMOCRACY: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction, af Ole Skovsmose
4. DELIBERATIVE MATHEMATICS EDUCATION FOR SOCIAL DEMOCRATIZATION IN LATIN AMERICA, af Paola Valero
5. LITTERATUR OG DANDELSE, af Klaus P. Mortensen
6. TEORETISK TÆNKNING I HUMANISTISK VIDENSKAB, af Kirsten Hastrup
7. DANDELSE OG DANDELSESTÆNKNING, af Sven Erik Nordenbo
8. SKOLEN SOM DANNINGENS STED, af Lars Løvlie
9. DANDELSE, af Lars Jakob Muschinsky
10. BETWEEN PLATONISM AND CONSTRUCTIVISM: IS THERE A MATHEMATICS ACQUISITION DEVICE? af Carl Winsløw
11. REGULATION IN "PROGRESSIVIST" PEDAGOGIC DISCOURSE: INDIVIDUALISED TEACHER-PUPIL TALK, af Lilie Chouliaraki
12. VOICING THE SILENCE OF THE PEDAGOGIC SPACE: POWER AND HETEROGLOSSIA IN PUPILS' TALK, af Lilie Chouliaraki
13. HOME ECONOMICS - STANDPOINTS AND EXPERIENCES IN DANISH SCHOOL SETTINGS af Jette Benn
14. DEN MUSIKPÆDAGOGISKE FORSKNING'S TERRITORIUM: HOVEDBEGREBER OG DISTINKTIONER I GENSTANDSFELTET, af Frede V. Nielsen
15. FORSKNINGSMÆSSIGE PERSPEKTIVER I FORSØG MED UNDERVISNING I SKRIFTLIG FREMSTILLING, af Bettina Perregaard
16. "JEG SYNES ALTID AT HISTORIER HAR NOGET AT GÅ UD PÅ" - om divergente undervisningsformer i dansk, af Vibeke Hetmar
17. DET HELE BEGYNDTE MED SKRIFTEN, af Frans Gregersen
18. THE EMERGING PRACTICES OF A NOVICE TEACHER: THE ROLES OF HIS SCHOOL MATHEMATICAL IMAGES, af Jeppe Skott
19. RESTGRUPPEN OG NORMALITETEN, af Erik Jørgen Hansen
20. PROFESJONALISERING OG GRENSERDRAGNINGSPROCESER - mellem normalitet og afvik, af Bodil Ravneberg
21. LIVSFÆRDIGHEDER - Cross Curricular Competences (CCC) af Niels Egelund
22. COHERENCE IN THEORIES RELATING MATHEMATICS AND LANGUAGE af Carl Winsløw
23. EN VIDENSKABENDE PROFESSION? af Per Fibæk Laursen
24. SPROGET SOM KILDE TIL PERSONLIG OG KULTUREL IDENTITET af Sproggruppen ved faget dansk
25. DEVELOPING TEACHERS' ABILITY TO STIMULATE CHILDREN'S COGNITION, af Philip Adey
26. PROCESORIENTERET MUNDTLIGHEDSPÆDAGOGIK, af Mads Th. Haugsted
27. 3 ARTIKLER OM KVALITETSDRIFTELSE I SKOLEN, af Jørgen Stampe
28. FORTÆLLINGER TIL AT RØRE VED - om læreprocesser i animationsteatret, af Ida Hamre
29. SPROG- OG MEDIEANALYSEN I DANSKEFAGET, af Ib Poulsen
30. DEVELOPMENTAL WORK AS PART OF RESEARCH Preliminary Results of Classroom Studies, af Jette Benn
31. FAGET DANSK - kronologiske, systematiske og utopiske fundamenter, af Finn Hauberg Mortensen
32. POSTMODERN ENLIG HTENNING, SCHOOLS AND LEARNING. Is it Meeting the Concrete or Meeting the Abstract that Educates? af Allan Tarp
33. EN MINDRE DIDAKTIK: Didaktisk topologi i *Moralske Tanker* af Ludvig Holberg af Aslaug Nyrnes
34. TEACHING CULTURE: ENGLISH, MEDIA EDUCATION AND DESTINATIONS BEYOND af David Buckingham

Skolefag, Læring & Dannelse

Postmoderne matematik: Konkrete total-fortællinger

Allan Tarp,
Danmarks Lærerhøjskole

En matematiklærer på HF fællesfag bemærker at klassen har let ved kapitalformlen, men svært ved den eksponentielle funktion. Denne forskel kan forstås dels ud fra modernitetsteori og dels ved at betragte matematik som et sproghus. I følge A. Giddens er senmoderniteten karakteriseret ved at selvidentitet er blevet et refleksivt projekt hvor den enkelte må konstruere sin egen biografiske selvfortælling. I følge J. F. Lyotard betyder postmodernitet skepsis over for meta-fortællinger. De to ovennævnte minder er eksempler på hhv. en konkret fortælling og en abstrakt meta-fortælling. Denne artikel reflekterer over ét muligt indhold af postmoderne konkret matematik i skolen.

Uddrag af en lærers undervisnings-fortælling

John er en ung dansk matematiklærer på HF fællesfag. På Johns undervisningsdagsorden står de to ligninger $K = Ko \cdot (1+r)^n$ og $f(x) = b \cdot a^x$. Skønt disse ligninger minder meget om hinanden, har Johns studenter ingen problemer med den første, men svære problemer med den sidste, hvilket får John til at oversætte den sidste til den første:

Min første klasse var en HF fællesfagsklasse. Procent-regning og geometri var nemt for dem at forstå. Så kom vi til funktionsbegrebet, og det var meget svært. I dag ved jeg så godt hvordan jeg skal gøre det, men det vidste jeg ikke på det tidspunkt. I dag gør jeg sådan i min klasse, jeg har ikke nævnt selve funktionsbegrebet, jeg tror jeg har kaldt det for sammenhænge eller sådan et eller andet, og så kaldt den ene variabel for y og den anden for x og så arbejdet med det. Men jeg har ikke nævnt funktionsbegrebet endnu, og jeg har slet ikke nævnt $f(x)$ i stedet for y, det tør jeg ikke belært efter l. p. de første jeg underviste på HF fællesfag. Det forstår de ikke, de kan efter en måned med funktions-

begrebet stadig væk spørge om, hvad er x og hvad er y, fordi jeg bliver jo nødt til at sige det der med y, for jeg kan godt huske fra folkeskolen, der brugte vi også det med y og x. De forstod ikke det der med $f(x)$, så jeg blev nødt til at kalde, når der står $f(x)$ så betyder det y, og det der står inden i parentes, det er x. Og det kunne jeg sige 50- 100 gange i alt til sådan en klasse, så der var det svært.

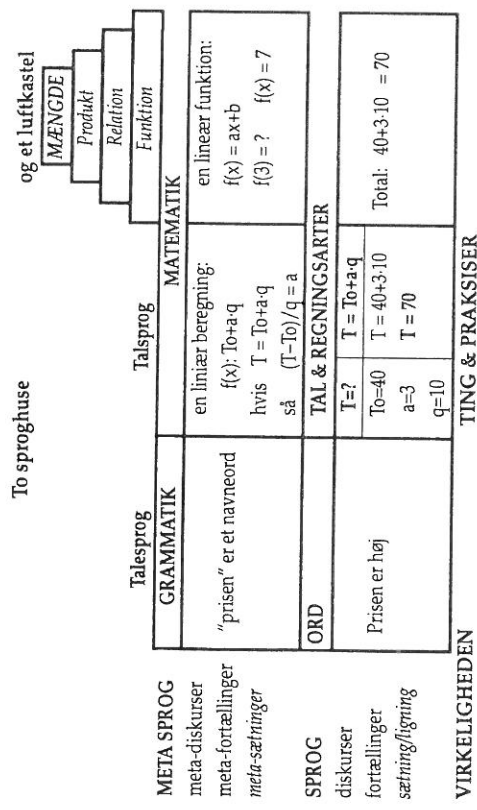
Matematik - et sproghus eller et luftkastel

De to ligninger $K = Ko \cdot (1+r)^n$ og $f(x) = b \cdot a^x$ indeholder begge et regnestykke, men hvor det første er knyttet til en konkret størrelse K, er det sidste knyttet til det abstrakte begreb funktion, hvorved de bliver hhv. konkret og abstrakt italesat. De to forskellige abstraktionsniveauer kan illustreres ved at betragte matematik som del af et sproghus.

Alle samfund har brug for sprog til at sætte verden i tale og i tal: Et talesprog til at skelne ting ved hjælp af ord i sætninger „Omkostningen er høj“; og et talsprog til at skelne grader af mange ved hjælp af tal (talte eller beregnede) i sætninger, kaldet ligninger „Prisen er fire og tredive komma to ($a=34,2$)“, „Den totale omkostning er stykpris gange styktal ($T=a \cdot q$)“.

Verden beskrives af sprog, der beskrives af metasprog. Grammatik beskriver ord i sætninger, og matematik beskriver tal og beregninger i ligninger. Som talsprogets grammatik kan matematik fortælle to slags fortællinger: Den moderne matematiks abstrakte fortælling, der italesætter al matematik inklusive tal og regningsarter som skabt af ét universelt, platonisk begreb, mængden. Eller konkrete fortællinger om de sociale behov, der skabte tallene og regningsarterne (se f.eks. Tarp 1998).

Et sprog kan således betragtes som et hus med to etager. Den nedre konkrete sprogetage, der huser fortællinger og litteratur, og som bruger sætninger og ligninger til at italesætte og italsætte verden. Den øvre abstrakte meta-sprogetage, der huser de meta-fortællinger, som italesætter sætninger og ligninger. Ligninger som $K = Ko \cdot (1+r)^n$ og $T = To + a \cdot q$ er eksempler på en konkret italsættelse, der tilknytter tal til størrelser gennem beregninger. Bogstavregning, der omformer én ligning til en anden, er eksempler på en abstrakt meta-diskurs, der ikke har størrelser, men ligninger som objekt.



Sætningen „f(x) = b·a^x” kunne ligne en italesættelse, men er i virkeligheden en italesættelse, hvis hensigt er at tilknytte ikke et tal, men en etikette til forskellige regnestykker som f.eks. b·a^x, b·x^a og b+a·x, for at kunne repræsentere disse i en meta-fortælling. En mere korrekt måde at vise, at f(x) blot er en etikette, ville være at skrive f(x): b·a^x.

I sin bog „Introductio” fra 1748 taler Euler om konstante og variable størrelser, og om funktioner som regnestykker med variable størrelser. Dvs. Euler italesætter funktionsbegrebet konkret, som en *abstraktion* fra eksempler på et lavere abstraktionsniveau. Moderne matematik italesætter funktionsbegrebet abstrakt, som et *eksempel* på noget fra et højere abstraktionsniveau: En funktion er et eksempel på en relation, der er et eksempel på et mængdeprodukt, der er et eksempel på en mængde. Kirken italesatte agerbrugskulturen oppefra og ned, og moderne matematik gør det samme med beregningskulturen, i begge tilfælde med problematiske konsekvenser for produktiviteten til følge. Konkret italesat bliver den abstrakte definition „En funktion er en relation, hvor førstekomponent-identitet medfører andenkomponent-identitet” til en ren banalitet: „En beregning kan kun resultere i ét tal”, hvilket minder om eventyret „Kejserens nye klæder”.

Lighedstegnet i ligningerne $K = Ko \cdot (1+r)^n$ og $f(x) = b \cdot a^x$ er dynamisk af typen := kendt fra datalogi. Dette er i modsætning til

den moderne matematiktradition, hvor et lighedstegn er et eksempel på en ækvivalensrelation, som repræsenterer identitet; og en ligning er et eksempel på et åbent udsagn, der ikke ændrer sandhedsværdi blot man gør det samme på begge sider af lighedstegnet.

„f(x)” er en forkortelse for „et regnestykke f med x som variabel størrelse”. f(3) betyder således „et regnestykke f med 3 som variabel størrelse”. Og f(x)=7 antyder, at 7 er et regnestykke. Begge sætninger er eksempler på syntaksfejl af typen „udsagnsordet synger”, „en funktion har værdier og vokser” og andre sætninger, der overtræder Russells type-teori ved at sammenblande ord fra forskellige abstraktionsniveauer. En funktion kan være lineær, kvadratisk eller andet, men en funktion kan ikke være 7 eller 9 og kan derfor ikke vokse.

De to etager i sproghusets italesættes „sprog” og „sprogets grammatik” i talesproget, og „anvendelser af matematik” og „matematik” i talsproget. Disse to italesættelser skaber to modstridende myter: „Sprog før sprogets grammatik” og „Matematik før anvendelse af matematik”. Myter, der har givet verden alfabetisme og analfabetisme inden for hhv. talesproget og talsproget. Analfabetismen kan vendes til alfabetisme ved at erstatte italesættelsen „anvendelse af matematik” med „regning”, „talsprog” eller et lignende selvstændigt navn for herved at acceptere, at det er en menneskeret at bruge et sprog uden at kende dets meta-sprog.

Postmoderne elever: Konkret eller abstrakt italesættelse

Et skift fra konkret til abstrakt italesættelse betyder et skift fra konkret til abstrakt autoritet og legitimitet, hvilket har stor betydning for vore dages elever. Den engelske sociolog Anthony Giddens beskriver vor tids samfund som en høj- eller senmoderinitet, der adskiller sig fra foregående samfund med hensyn til aftraditionalisering, globalisering og individualisering. Modernitetens dynamik stammer fra en adskillelse af tid og rum, der gør sociale relationer globale; fra abstrakte systemer, der fjerner aktivitet fra det lokale, hvorved dagligdagens kundskaber bliver aflært og erfaringer formidlet; og fra refleksivitet, der øger vidensniveauet både institutionelt og personligt. I en sådan post-traditionel orden bliver selv-identitet et refleksivt projekt, hvor den

enkelte er nødt til at konstruere sin egen biografiske selvfortælling. Meningsløshed bliver et fundamentalt psykisk problem og autenticitet bliver en fortrinlig ramme for selv-aktualisering.

Giddens' modernitetsteori giver én forståelse af Johns elever. I senmoderniteten er læring meningsfuld hvis den udvider elevens selvfortælling. En sætning er typisk en relation mellem to begreber. En sætning udvider den eksisterende selvfortælling, hvis denne allerede indeholder et af begreberne. Men hvis begge begreber mangler, kan sætningen kun læres udenad, hvorved læringen bliver indkapslet. Moderne elever har muligvis ikke noget imod at blive ekkoet af meta- fortællinger, men for postmoderne elever vil indkapslet læring være gift, der vil resultere i en splittet personlighed: en professionel personlighed på jobbet og en civil i dagligdagen.

Kapital-ligningen $K = Ko \cdot (1+r)^n$ er en konkret italesættelse af slutkapitalen K, der tilknyttes et regnestykke $Ko \cdot (1+r)^n$ til beregning af det relevante K-tal. Hvis "slutkapital" er et begreb fra elevens eksisterende fortælling, vil denne fortælling være meningsfuld og autentisk, samt være et eksempel på konkret matematik, der udvider elevens eksisterende fortælling med to fortællinger. En fortælling om hvordan K-tallet beregnes ud fra de bestemmende størrelser, og en meta-fortælling om hvordan hver af disse bestemmende størrelser kan beregnes ud fra de øvrige størrelser.

Funktions-ligningen $f(x) = b \cdot a^x$ er en abstrakt italesættelse af regnestykket $b \cdot a^x$, der tilknyttes en funktionsetikette $f(x)$, hvor funktion italesættes som et eksempel på en relation. Hvis hverken relation eller funktion er en del af elevens selvfortælling, vil denne funktionsligning ikke kunne tilknyttes eller læres. Ligningen vil være et eksempel på abstrakt matematik og på Giddens' abstrakte systemer, hvor eleven aflæres den førnævnte beregningskunnen.

Dekonstruktion af moderne matematik til postmoderne matematik

Postmoderne elever fravælger abstrakt matematik på grund af dens manglende tilknytning til verden og dens aflæringstendens, og foretrækker konkret matematik på grund af dens evne til at knytte sig til og udvide deres eksisterende fortællinger. En dekonstruktion af moderne abstrakt matematik til postmoderne

konkret matematik, der respekterer menneskets behov for og ret til et talsprog, kunne lade sig inspirere af Eulers funktionsbegreb og af arabernes førmoderne matematik genfortolket i lyset af moderne regneteknologi som lommeregner og computer. Efter-som "algebra" betyder "genforene" på arabisk bør konkret matematik fremstille regningsarter som svar på spørgsmålet "Hvor mange totalt?". Der findes to opsamlings-teknikker: tælling med fingre og beregning med regningsarter. Regning handler altså om at opsamle totalen eller det modsatte, at opdele totalen. Et muligt indhold af postmoderne matematik kunne således være *konkrete total-fortællinger*.

Regningsarterne "+" og "·" bruges til at opsamle totalen af variable styk-tal og per-tal. Regningsarterne "-" og "^" bruges til at opsamle totalen af konstante styk-tal og per-tal.

Totalen opsamles af (opdeles i)		variable	konstante
styk-tal:	m, s, ...	+	(-)
per-tal:	m/s, m/100m=%, ...	·	(d)
			(/)
			(√, log)

At aflære eller tillære beregning

Inden for abstrakt matematik aflæres regning ved brug af en 3-kolonne metode "Tekst-Regnestykke-Resultat", hvor regnestykkerne må læres udenad. Inden for konkret matematik bruges et 2-kolonne regneskema "Tal&Beregning": en tal-kolonne til kendte og ukendte tal; og en beregnings-kolonne til løsning og beregning af en ligning, der indeholder den ubekendte som eneste ubekendt. Her skal kun én ligning læres eller vælges: Da enhver beregning kan vendes om kan også en ligning vendes om ved at flytte tal fra den ene side af lighedstegnet til den modsatte ved samtidig at gøre regnetegnet modsat. Ved bogstavregning kan en regnefortælling om T således vendes til en regnefortælling om q: Hvis $T = To + a \cdot q$ så er $(T-To)/a = q$.

3-kolonne regning		2-kolonne regning	
tekst	beregning	tal	beregning
Total kost:	$40+3 \cdot 10$	=	70
Beg. kost:	$70-3 \cdot 10$	=	40
Stk. pris:	$(70-40)/10$	=	3
Kvantitet:	$(70-40)/3$	=	10
		$q = ?$	$T = To + a \cdot q$
		$T = 70$	$T - To = a \cdot q$
		$To = 40$	$(T - To)/a = q$
		$a = 3$	$(70-40)/3 = q$
			$10 = q$

Total-fortællinger i grundskolen

Fra første skoledag kunne en typisk aktivitet være at italsætte konkrete ting ved at udføre og rapportere opsamling og opdeling af totaler under benyttelse af både optælling og beregning. Dette ville give en autentisk påkønnelse af, at beregning oftest er hurtigere og sikrere end optælling. Optælling er en kombination af opdeling og opsamling: En bunke sten opdeles først i enheder på 1, 2 eller 3, hvorefter den opsamles ved at optælle antal enheder, idet man altid er påpasselig med kun at sammentælle ens enheder. Tolv sten kan således italsættes og optælles på mange forskellige måder, der alle rapporteres af „Total-ligningen“ $T = a \cdot b$:

$$T = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = 1 \cdot 12 \quad \text{og senere}$$

$$T = 2 \cdot 2 / 5 \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 10 = \text{osv.}$$

Tællerresultatet kan beregnes direkte ved hjælp af „Opdelings-ligningen“ $T = T / b \cdot b$:

$$12 = 12 / 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2; \quad 12 = 12 / 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3; \quad 12 = 12 / 5 \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \text{ osv.}$$

Opdelings-ligningen kan også bruges til at veksle mellem enheder:

$$T = 6 \cdot \text{par} = 6 \cdot 2 = 12 = 12 / 3 \cdot 3 = 4 \cdot \text{trippel}$$

$$T = 6 \cdot \text{meter} = 6 \cdot \text{meter} / \text{cm} \cdot \text{cm} = 6 \cdot 100 \cdot \text{cm} = 600 \cdot \text{cm}$$

$$T = 6 \cdot \text{£} = 6 \cdot \text{£} / \$ \cdot \$ = 6 \cdot 1,63 \cdot \$ = 9,78 \cdot \$$$

Medens gangning (a·b) altid har mening, forudsætter sammenlægning (a+b) omvæksling til ens enheder. Ved sammenlægning får total-ligningen derfor en udvidet form $T = a \cdot b + c \cdot d$:

$$T = 3 \cdot \text{par} + 4 \cdot \text{trippel} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18 = 18 / 2 \cdot 2 = 18 / 3 \cdot 3 = 9 \cdot \text{par} = 6 \cdot \text{trippel}$$

Dvs. „2·2=4“ er altid sandt medens „2+2=4“ er sjældent sandt.

Konkrete tal bærer altid (er altid ganget med) enheder. Konkret matematik behandler gangning før addition, hvilket ikke er noget problem med de nye lommeregnerne. En lommeregner kan udregne et regnestykke, men hverken opstille det eller fortælle, hvad der udregnes.

I talesproget bruges altid hele sætninger til at vurdere en sætnings sandhed. Vi nøjes ikke med at sige „grøn“, men siger „bolden er grøn“. Af samme grund bør konkret matematik bruge hele sætninger fra første klasse og sige „T=3·5“ i stedet for blot „3·5“ for således at fortælle både hvad der regnes ud, og hvordan. Det er menneskets job. Typiske problemer fra abstrakt matematik som „3+5“ er tredje ordens abstraktioner, der er bortabstraheret

fra både verden, enheder og ligninger. En sådan overabstraktion fremstiller matematikken som indkapslet og skaber alvorlige problemer for eleverne når de senere møder (kon)tekstopgaver.

Konkrete tal bærer altid enheder. Kontekstløs addition er meningsløs både mht. tal (3+5) og brøker (5/6+2/9). En konkret brøk betyder blot en ændring af enheden: 5/6·m = 5·m/6. Konkrete brøker kan sammenganges, men addition skal følge total-ligningen $T = a \cdot b + c \cdot d$, hvilket kan resultere i mange forskellige totaler F afhængigt af b og d:

$$T = 5 / 6 \cdot b + 2 / 9 \cdot d = F \cdot (b + d)$$

Total-fortællinger i overskolen

Hvis en af størrelserne i total-ligningen er variabel er totalen også variabel. Denne variation kan illustreres med tabeller og kurver:

$$T = a \cdot b + c \cdot d = a \cdot x + e$$

Størrelserne i total-ligningen kan selv være totaler:

$$T = a \cdot b + c \cdot d = a \cdot T_2 + T_3 \cdot T_4 = a \cdot (m \cdot x + n \cdot y) + (p \cdot x + q \cdot y) \cdot (r \cdot x + s \cdot y)$$

I dette tilfælde kan totalen illustreres som et landskab i et tredimensionalt koordinatsystem.

Inden for trigonometri kan opdelings-ligningen anvendes til udregning af sidelængderne i en retvinklet trekant:

$$a = a / c \cdot c = \sin A \cdot c = a / b \cdot b = \tan A \cdot b \quad \text{osv.}$$

Inden for statistik kan total-ligningen anvendes til udregning af den samlede procent eller brøkdæl:

$$T = P \cdot N = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + \dots \quad \text{hvor } N = n_1 + n_2 + \dots \quad \text{og } p_l = q_l / r_l \text{ osv.}$$

Procenter og brøkdæle har således deres egen total-ligning, der omsætter per-tal til styk-tal før sammenlægning:

$$P = p_1 \cdot n_1 / N + p_2 \cdot n_2 / N + \dots$$

Den samlede rente giver også anledning til en speciel total-ligning:

$$\begin{aligned} T &= a \cdot b + c \cdot d = T_0 \cdot 1 + T_0 \cdot R = T_0 \cdot (1 + R) \text{ ved ét rentetillæg, ellers} \\ T_2 &= T_1 \cdot 1 + T_1 \cdot r = T_1 \cdot (1 + r) = T_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = T_0 \cdot (1 + r)^2 \\ T_3 &= T_2 \cdot 1 + T_2 \cdot r = T_2 \cdot (1 + r) = T_0 \cdot (1 + r)^2 \cdot (1 + r) = T_0 \cdot (1 + r)^3 \\ &\text{osv. indtil} \end{aligned}$$

$$T_n = T_0 \cdot (1 + r)^n = T_0 \cdot (1 + R).$$

Renter har således deres egen total-ligning:

$$1 + R = (1 + r)^n = (1 + r) \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) \dots$$

Inden for differential- og integralregning opsamler total-ligningen variable per-tal ved hjælp af integration (idet per-tal omsættes til

styk-tal før sammenlægning. Ved variable meter/sekund-tal (hastigheder v) kan den totale tilvækst i meter-tallet (m på mange lommeregnerne beregnes som:

$$T = \Delta m = m/s + m/s + m/s + \dots = \int m/s \cdot s = \int v \, dx$$

En „lokal tilvækst dy “ for en „lokal lineær“ størrelse y kan opdeles i:

$$dy = dy/dx \cdot dx = y' \cdot dx \quad \text{hvor } y' \text{ er den „lokale hældning“}.$$

Beregning af „lokal hældning“ kan ske ved hjælp af „lokalt sande“ ligninger, der oversætter ikke-lineære regnestykker til

lineære regnestykker, f.eks. gælder det for t lille, at $(1+t)^n = 1+n \cdot t$, $\sin(n+t) = \sin(n) + t \cdot \cos(n)$ og $\cos(n+t) = \cos(n) - t \cdot \sin(n)$.

Den totale tilvækst ΔT er summen af de lokale tilvækster dT :

$$\Delta T = \int dT = \int T' \cdot dx$$

Således kan et integral også udregnes som den totale tilvækst af en stamfunktion T :

$$\text{Hvis } T' = v \text{ så er } \int v \, dx = \int T' \cdot dx = \Delta T = T_2 - T_1$$

Referencer

- Euler, L. (1748, 1988): *Introduction to Analysis of the Infinite*, New York: Springer Verlag
- Giddens, A. (1991) *Modernity and Self-identity*, Oxford: Polity Press
- Lyotard, J. F. (1985) *The Postmodern Condition*, Minneapolis: University of Minnesota
- Tarp, A. (1998) *What if Mathematics is a Social Construction*, in Gates, Peter (ed.) *Proceedings of the First Mathematics Education and Society Conference*, Nottingham, UK.